



Diplomarbeit

Symmetrische Kettenzerlegungen von
Verbänden und Intervallzerlegung des
linearen Verbandes

vorgelegt von

Eva Kruse

unter Anleitung von

Prof. Dr. Ulrich Faigle

Mathematisches Institut der Universität zu Köln
Sommersemester 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Motivation	3
1.2	Überblick	3
2	Grundlagen	5
2.1	Halbordnungen	5
2.1.1	Direktes Produkt	7
2.1.2	Parallelverknüpfung	8
2.1.3	Serienverknüpfung	9
2.1.4	Die lexikographische Ordnung	10
2.1.5	Rangprodukt	10
2.1.6	Exponentiation	12
2.2	Verbände	12
2.2.1	Der boolesche Verband	15
2.2.2	Der lineare Verband	16
3	Symmetrische Kettenzerlegungen	19
3.1	Zerlegung des Teilerverbandes	20
3.2	Das Produkttheorem	21
3.3	Der Klammeralgorithmus	23
3.4	Das Matchingkriterium	27
3.5	Zerlegung des linearen Verbandes	32

4	Der Algorithmus von Vogt und Voigt	36
4.1	Dreiteilung von $\mathcal{L}(n)$	36
4.2	Schubert-Normalform	39
4.3	Eine Unterteilung	42
4.4	Der Algorithmus	54
4.5	Der Spezialfall $t=0$	58
5	Intervallzerlegung	62
5.1	Kombinatorische Grundlagen	62
5.2	Zwei einfache Fälle	71
5.3	Höhere Dimensionen	74
5.3.1	Ein hinreichendes Kriterium	89
5.3.2	Der Intervall-Schnitt-Satz	99
6	Ausblick	102

Erklärung

Ich, Eva Kruse, erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Siegburg, 24. August 2004

Danksagung

Ich möchte mich bei allen Personen bedanken, die mich beim Gelingen der Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben.

Besonders bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Faigle für die Themenstellung und die Betreuung bei dieser Arbeit.

Für die hervorragende Betreuung und deren Lektorat meiner Arbeit möchte ich Britta Wienand danken, die immer Zeit für hilfreiche Diskussionen hatte.

Mein Dank gilt auch meinen Kommilitoninnen Katja, Heike und Berit für die oft mühsamen aber auch lustigen Stunden beim Bearbeiten der Übungszettel und Prüfungsvorbereitungen.

Weiterhin danke ich meinen Eltern und meiner Schwester dafür, dass sie mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen.

Herausragender Dank gilt meinem Freund Thorsten für dessen Unterstützung und Motivation während des Studiums.

1 Einleitung

1.1 Motivation

In der Kombinatorik interessieren wir uns für die Existenz und Struktur gewisser Konfigurationen. Oft verschafft uns die Lösung von Abzählproblemen in einer Menge einen Überblick über deren Struktur und die Anordnung der Elemente.

Dabei spielen Halbordnungen und insbesondere Verbände eine wichtige Rolle. Wissen wir, dass sich eine geordnete Menge in gewisse Teilordnungen, beispielsweise Ketten oder Intervalle, zerlegen lässt, so haben wir einen besseren Überblick über deren Struktur. Eine interessante Frage ist die nach der Existenz einer *symmetrischen Kettenzerlegung*, d. h. einer Zerlegung in disjunkte, symmetrische Ketten. Der Nachweis einer solchen Zerlegung des Booleschen Verbandes hat beispielsweise als schöne Konsequenz den *Satz von Sperner*, der wiederum Anwendung in der Optimierung findet.

Der nicht leicht überschaubare Verband der linearen Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraumes bildet eine weitere Klasse von in symmetrische Ketten zerlegbarer Ordnungen. Dies wurde bereits im Jahre 1977 von Jerrold R. Griggs [4] bewiesen. Erst 17 Jahre später gelang es Frank Vogt und Bernd Voigt [14] erstmals, eine solche Zerlegung explizit per Induktion anzugeben. Ausgehend von deren Konstruktion und Abzählargumenten besteht die Vermutung, dass sich der Verband der linearen Unterräume auf gewisse Weise in disjunkte Intervalle zerlegen lässt.

In meiner Diplomarbeit möchte ich begründen, warum der Algorithmus von Vogt und Voigt wider Erwarten diese Vermutung nicht bestätigt.

1.2 Überblick

Das Kapitel „Grundlagen“ beinhaltet die benötigte Theorie, wobei sich Notationen und Aufbau im Wesentlichen an das Buch „Lattice Theory“ [9] und das Vorlesungsskript von Herrn Professor Dr. Faigle [15] anlehnen.

In Kapitel 3 geht es um symmetrische Kettenzerlegungen. Dabei wird zunächst beschrieben, wie de Bruijn, Tengbergen und Kruyswijk [5] den Teilverband in symmetrische Ketten zerlegt haben. Darauf aufbauend wird das

Produkttheorem bewiesen, das eine Anwendung im lexikographischen Algorithmus von Aigner [2] findet.

Dann wird ausführlich auf den Klammeralgorithmus von Greene und Kleitman [6] eingegangen und anschließend zur Vorbereitung auf Kapitel 4 das Matchingkriterium vorgestellt.

Schließlich wird ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer symmetrischen Kettenzerlegung gegeben, das nach Engel und Gronau [13] der lineare Verband erfüllt.

Das vierte Kapitel stellt den Algorithmus von Vogt und Voigt vor, das den linearen Verband mit Hilfe des Matchingkriteriums explizit in symmetrische Ketten zerlegt. Grundlage dieses Kapitels ist der Artikel „Symmetric Chain Decompositions of Linear Lattices“ [14] aus dem Jahre 1994. Dabei werden einige Beweise geliefert, auf die im Artikel verzichtet wurde.

In Kapitel 5 schließlich beschäftige ich mich mit der Frage nach der Existenz einer Intervallzerlegung des linearen Verbandes. Ausgehend von der Rekursion der Galoiszahlen und dem Algorithmus von Vogt und Voigt wird vermutet, dass eine solche Zerlegung existiert.

Bis Dimension drei und für Dimension vier über den Körper $K = \{0, 1\}$ wird diese Vermutung bewiesen. Für höhere Dimensionen zeigt am Ende der *Intervall-Schnitt-Satz*, dass zumindest der Algorithmus zu keiner Intervallzerlegung hinführt.

Abschließend wird im sechsten Kapitel ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen dieses Ansatzes aufgezeigt.

2 Grundlagen

2.1 Halbordnungen

Definition 2.1 Eine Halbordnung (oder Ordnung) ist eine Relation „ \leq “ auf einer Menge M mit den folgenden Eigenschaften für $x, y, z \in M$:

- $x \leq x$ für alle $x \in M$ Reflexivität
- Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ Antisymmetrie
- Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$ Transitivität

Wir notieren abkürzend $a < b$ für $a \leq b$ und $a \neq b$.

Das Paar (M, \leq) heißt partiell geordnete Menge.

Eine Teilordnung von (M, \leq) ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ mit derselben Ordnungsrelation „ \leq “.

Beispiel 1 Die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen einer Menge X ist partiell geordnet bezüglich der Enthaltenseinsrelation „ \subseteq “.

Beispiel 2 Die Menge \mathbf{Z}_+ der positiven ganzen Zahlen ist partiell geordnet bezüglich der Teilbarkeitsrelation „ $|$ “.

Beispiel 3 Die Menge $\mathcal{L}(n, K)$ aller linearen Unterräume eines n -dimensionalen Vektorraumes V ($n < \infty$) über einen Körper K ist partiell geordnet bezüglich „ \subseteq “.

Sei (M, \leq) eine partiell geordnete Menge.

Gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$ für zwei Elemente $a, b \in M$, so sagen wir, a und b sind *vergleichbar*, ansonsten *unvergleichbar*.

Sind je zwei Elemente aus M vergleichbar, so nennen wir M eine *Kette*.

Sind je zwei verschiedene Elemente aus M unvergleichbar, so sprechen wir von einer *Antikette*.

Die *Länge* einer Kette mit n Elementen ist definiert als $n - 1$.

Die Länge einer maximalen Kette in M nennen wir die *Länge* von M .

Eine *obere (untere) Schranke* von $X \subseteq M$ ist ein Element $a \in M$ mit $a \geq x$ ($a \leq x$) für alle $x \in X$.

Existiert eine kleinste obere (größte untere) Schranke b von $X \subseteq M$, so heißt b das *Supremum (Infimum)* von X und wir schreiben $b = \sup(X)$ ($b = \inf(X)$). Ein *maximales (minimales) Element* von M ist ein Element $a \in M$, so dass für alle $b \in M$ gilt: Aus $b \geq a$ ($b \leq a$) folgt $b = a$.

Besitzt M ein eindeutiges maximales Element $\mathbf{1}$, so nennen wir $\mathbf{1}$ das *Eins-element*, analog ein eindeutiges minimales Element das *Nullelement* $\mathbf{0}$ von M .

Ist $a \leq b$, so heißt die Menge $\{x | a \leq x \leq b\}$ das *Intervall* $[a, b]$. Die Menge $\text{Filter}(a) := \{x | x \geq a\}$ heißt der *Filter* von a . Die Menge $\text{Ideal}(a) := \{x | x \leq a\}$ heißt das *Ideal* von a .

Ein Element $a \in M$ heißt *oberer (unterer) Nachbar* von $y \in M$, falls $y < a$ ($y > x$) gilt, es aber kein $z \in M$ gibt mit der Eigenschaft $y < z < a$ ($x < z < y$). Besitzt M eine $\mathbf{0}$ und eine $\mathbf{1}$, so heißen die oberen (unteren) Nachbarn von $\mathbf{0}$ ($\mathbf{1}$) *Atome (Coatome)*.

Das *Hassediagramm* von $P = (M, \leq)$ ist die Matrix $H_P = (a_{ij}) \in \mathbf{Q}^{M \times M}$, wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \text{ oberer Nachbar von } i \text{ in } P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

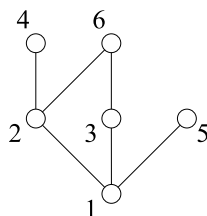


Abbildung 1: Hassediagramm von $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$

Bemerkung: Das Hassediagramm einer endlichen Ordnung wird oft bildlich dargestellt, indem man die Elemente als Punkte zeichnet und Paare von Nachbarn mit (gerichteten) Pfeilen verbindet. Zeichnet man so geschickt, dass ein oberer Nachbar auch bildlich immer über seinem unteren Nachbarn angesiedelt ist, so kann man im Hassediagramm statt Pfeilen einfach Liniensegmente nehmen und erhält einen Graphen $G(V, E)$ mit Knoten V und Kanten E , wie in Abbildung 1 dargestellt.

Mit Operationen auf Ordnungen kann man neue Ordnungen konstruieren. Dazu ein paar wichtige Beispiele:

2.1.1 Direktes Produkt

Eine viel untersuchte Operation auf Ordnungen ist das *Produkt*.

Seien im Folgenden (M, \leq_M) und (N, \leq_N) partiell geordnete Mengen.

Definition 2.2 Das (direkte) Produkt $M \times N = \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$ ist partiell geordnet durch:

$$(x, y) \leq_{M \times N} (x', y') :\Leftrightarrow x \leq_M x' \text{ und } y \leq_N y'$$

Um das Hassediagramm von $M \times N$ zu zeichnen, ersetzen wir jedes Element im Diagramm von M durch eine Kopie von N und verbinden „korrespondierende“ Elemente dieser Kopien von N entsprechend den ursprünglichen Relationen in M .

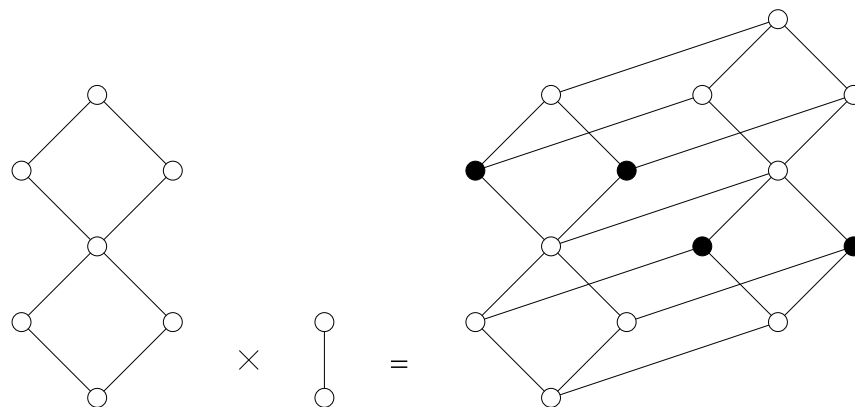


Abbildung 2: Direktes Produkt

Beispiel 4 Die Menge $S(k_1, \dots, k_n)$ aller n -Tupel $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $0 \leq a_i \leq k_i$ für $i = 1, \dots, n$ ist partiell geordnet durch

$$a \leq b :\Leftrightarrow \forall i : a_i \leq b_i$$

Sei $\mathcal{A} k_1 \leq \dots \leq k_n$. Dann gilt offensichtlich, dass

$$S(k_1, \dots, k_n) \cong \prod_{i=1}^n (0 < 1 < 2 < \dots < k_i)$$

ein Kettenprodukt ist.

2.1.2 Parallelverknüpfung

Eine einfache Operation ist die *Parallelverknüpfung*.

Definition 2.3 Die Parallelverknüpfung $M||N$ ist eine Halbordnung auf der Vereinigung $M \cup N$, definiert durch:

$$\begin{aligned} x \leq_{M||N} y & :\Leftrightarrow (x, y \in M \text{ und } x \leq_M y) \\ & \text{oder } (x, y \in N \text{ und } x \leq_N y) \end{aligned}$$

Bei der Parallelverknüpfung bleiben also Elemente aus M und N unvergleichbar und die Ordnungsrelationen von M und N werden beibehalten.

Um das Hassediagramm von $M||N$ zu zeichnen, setzen wir die Diagramme von M und N (ohne Verbindung) nebeneinander.

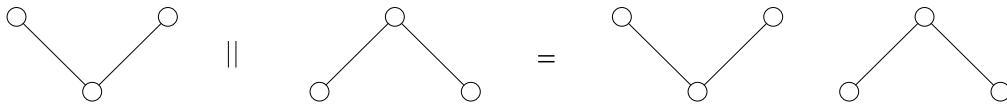


Abbildung 3: Parallelverknüpfung

2.1.3 Serienverknüpfung

Eine andere einfache Operation ist die *Serienverknüpfung*.

Definition 2.4 Sind M und N disjunkt, so ist die Serienverknüpfung $M \oplus N$ eine Halbordnung auf der Vereinigung $M \cup N$, definiert durch:

$$\begin{aligned} x \leq_{M \oplus N} y & \quad :\Leftrightarrow \quad (x, y \in M \text{ und } x \leq_M y) \\ & \quad \text{oder} \quad (x, y \in N \text{ und } x \leq_N y) \\ & \quad \text{oder} \quad (x \in M \text{ und } y \in N) \end{aligned}$$

Bei der Serienverknüpfung sind also alle Elemente von N größer als die Elemente von M . Ansonsten werden die Ordnungsrelationen von M und N beibehalten.

Um das Hassediagramm von $M \oplus N$ zu zeichnen, setzen wir das Hassediagramm von N über das von M und verbinden jedes maximale Element von M mit jedem minimalen Element von N .

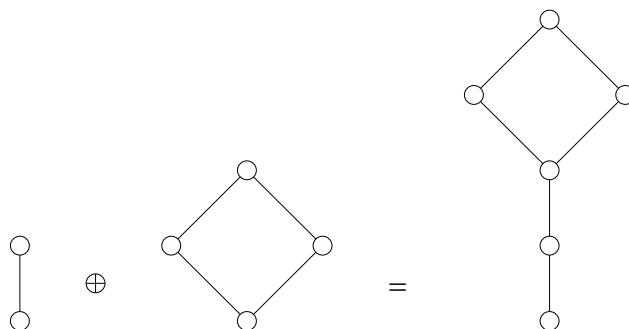


Abbildung 4: Serienverknüpfung

2.1.4 Die lexikographische Ordnung

Eine interessante Operation ist die *lexikographische Ordnung auf $M \times N$* .

Definition 2.5 Die lexikographische Ordnung $M \otimes N$ auf dem Produkt $M \times N$ ist definiert durch:

$$(x, y) \leq_{M \otimes N} (x', y') :\Leftrightarrow (x = x' \text{ und } y \leq_N y') \text{ oder } (x <_M x')$$

Um das Hassediagramm von $M \otimes N$ zu zeichnen, ersetzen wir jedes Element $x \in M$ durch eine Kopie $N_x \in N$ und verbinden dann jedes maximale Element von N_x mit jedem minimalen Element von N_y , immer wenn y ein oberer Nachbar von x in M ist.

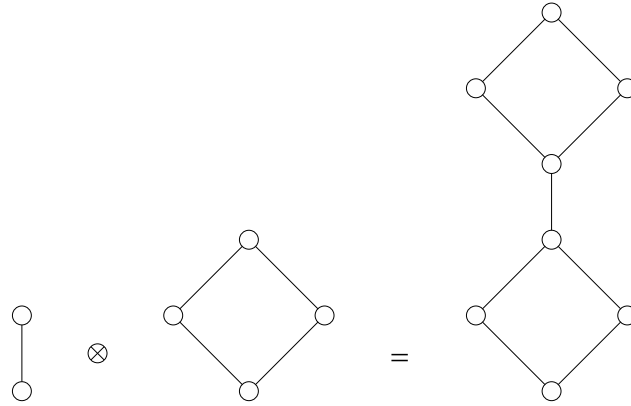


Abbildung 5: Lexikographische Ordnung

2.1.5 Rangprodukt

Sali [8] führte einen neuen Typ von Produktordnung ein: das *Rangprodukt*¹.

Dafür benötigen wir den Begriff des „Ranges“.

Wir nennen eine Kette, die in keiner echten Teilmenge einer anderen Kette enthalten ist, eine *maximale Kette*.

¹aus dem Englischen von der Verfasserin übersetzt: rankwise direct product

Definitionen 2.6 Sei (M, \leq) eine endliche partiell geordnete Menge, in der jede maximale Kette dieselbe Länge hat. Dann existiert eine (eindeutige) Funktion $r : M \rightarrow \mathbb{N}$, welche die maximale Länge einer Kette mit größtem Element p angibt:

$$r(p) = \max\{k \mid p_0 < p_1 < \dots < p_k = p\}$$

Diese Funktion r heißt Rangfunktion.

Ist m ein maximales Element von M , so heißt $r(m) =: r(M)$ der Rang von M und entspricht der Länge von M .

Die Menge $M_i = \{x \in M \mid r(x) = i\}$ heißt i -tes Niveau der Ordnung.

Bemerkung: Der Rang der Produktordnung ist: $r(M \times N) = r(M) \cdot r(N)$.

Mit dem Begriff des Ranges können wir jeder endlichen Ordnung einen- bis auf Reihenfolge der Knoten auf gleicher Höhe- *eindeutigen* Graphen zuordnen, indem wir Elemente gleichen Ranges auf gleicher Höhe zeichnen.

Beispiel: Der Graph der Ordnung gegeben durch die Relationen $a < b < c$ und $a < d < e < c$ ist bestimmt durch:

$$r(a) = 0, r(b) = r(d) = 1, r(e) = 2, r(c) = 3$$

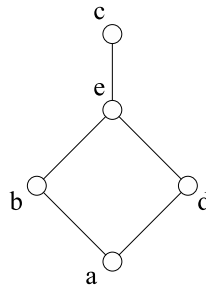


Abbildung 6: „Eindeutiger“ Graph einer endlichen Ordnung

Definition 2.7 Sei $r(M) = r(N)$. Dann ist das Rangprodukt $M \times_r N$ die Teilordnung des direkten Produktes $M \times N$, die durch $\bigcup_{i=0}^m M_i \times N_i$ induziert ist, d. h. für $x, x' \in M, y, y' \in N$ mit $r(x) = r(y), r(x') = r(y')$:

$$(x, y) \leq_{M \times_r N} (x', y') : \Leftrightarrow x \leq_M x' \text{ und } y \leq_N y'$$

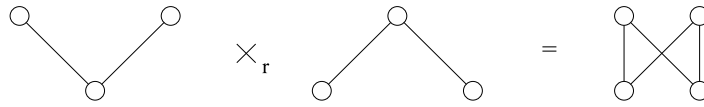


Abbildung 7: Rangprodukt

2.1.6 Exponentiation

Schließlich betrachten wir die *Exponentiation*.

Definition 2.8 Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt ordnungserhaltend, falls gilt:

$$x \leq_M y \Rightarrow f(x) \leq_N f(y)$$

Definition 2.9 Die Exponentiation N^M ist eine Halbordnung auf der Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen $f : M \rightarrow N$, definiert durch:

$$f \leq_{N^M} g :\Leftrightarrow \forall x \in M : f(x) \leq_N g(x)$$

2.2 Verbände

Definition 2.10 Eine partiell geordnete Menge (V, \leq) heißt Verband, falls zu je zwei Elementen $x, y \in V$ gilt: $\sup(\{x, y\})$ und $\inf(\{x, y\})$ existieren in V .

Wir nennen $\sup(\{x, y\}) = x \vee y$ auch die Verbindung von x und y und $\inf(\{x, y\}) = x \wedge y$ den Schnitt von x und y .

Lemma 2.1 *In einem Verband erfüllen der Verbindungsoperator \vee und der Schnittoperator \wedge folgende Gesetze:*

- $x \wedge x = x, x \vee x = x$ *Idempotenz*
- $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$ *Kommutativität*
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *Assoziativität*
- $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ *Absorption*
- $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$ *Konsistenz*

Beweis: Idempotenz und Kommutativität gelten offensichtlich. Die Assoziativität gilt auch offensichtlich, da $x \wedge (y \wedge z) = \inf(\{x, y, z\}) = (x \wedge y) \wedge z$ und $x \vee (y \vee z) = \sup(\{x, y, z\}) = (x \vee y) \vee z$. Leicht nachzuweisen ist die Konsistenz und aus der Konsistenz folgt das Absorptionsgesetz. \square

Lemma 2.2 *Die Elemente eines Verbandes erfüllen die modulare Ungleichung:*

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

sowie die distributiven Ungleichungen:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

und

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Beweis: Wegen $x \leq x \vee y$ und $x \leq z$ gilt $x \leq (x \vee y) \wedge z$. Außerdem gilt $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ und $y \wedge z \leq z$. Daraus folgt $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$ und somit insgesamt $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$.

Die erste distributive Ungleichung folgt aus:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \wedge y = x \wedge y$$

und

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge z) \wedge z = x \wedge z$$

und die zweite dual dazu. \square

Damit können wir die folgende Eigenschaft von Verbänden beweisen, die wir später oft benutzen werden:

Lemma 2.3 *Die Elemente eines Verbandes erfüllen die Äquivalenz*

$$a \leq b \wedge c \Leftrightarrow (a \leq b) \text{ und } (a \leq c)$$

und dual dazu:

$$a \geq b \vee c \Leftrightarrow (a \geq b) \text{ und } (a \geq c)$$

Beweis: Die Hinrichtung ist gültig wegen $b \wedge c \leq b$ und $b \wedge c \leq c$.

Für die Rückrichtung benutzen wir die distributive Ungleichung und das Absorptionsgesetz.

Es gilt:

$$(a \leq b) \wedge (a \leq c) \Leftrightarrow (a \vee b = b) \wedge (a \vee c = c)$$

also:

$$\begin{aligned} b \wedge c &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \geq a \end{aligned}$$

□

Definitionen 2.11 *Ein Verband V heißt beschränkt, wenn V ein Nullelement $\mathbf{0}$ und ein Einselement $\mathbf{1}$ besitzt.*

V heißt endlich, falls $r(V) < \infty$.

Bemerkungen:

- Jeder endliche Verband ist beschränkt.
- Beispiel 1 ($\mathcal{P}(X)$) bildet einen Verband, wobei Schnitt und Verbindung genau dem Schnitt und der Vereinigung im mengentheoretischen Sinn entsprechen:

$$S \wedge T = S \cap T \text{ und } S \vee T = S \cup T$$

Der Rang entspricht der Kardinalität der Menge:

$$r(S) = |S|$$

(Potenzmengenverband)

- Beispiel 2 (\mathbf{Z}_+) bildet einen Verband mit

$$x \wedge y = \min(x, y) \text{ und } x \vee y = \max(x, y)$$

- Beispiel 3 ($\mathcal{L}(n, K)$) bildet einen Verband mit

$$S \wedge T = S \cap T \text{ und } S \vee T = S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$$

und

$$r(S) = \dim(S)$$

(Unterraumverband)

- Beispiel 4 ($S(k_1, \dots, k_n)$) bildet einen Verband mit

$$r(a) = a_1 + \dots + a_n$$

Sind p_1, \dots, p_n paarweise verschiedene Primzahlen, so ist $S(k_1, \dots, k_n)$ isomorph zu dem Verband aller Teiler von $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$, geordnet durch „|“.

(Teilerverband)

Im Folgenden werde ich mich ausführlicher mit dem Potenzmengenverband und dem Unterraumverband beschäftigen.

2.2.1 Der boolesche Verband

In einem Verband V mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ ist $x \in V$ ein *Komplement* von $y \in V$, falls gilt:

$$x \wedge y = \mathbf{0} \text{ und } x \vee y = \mathbf{1}$$

V heißt *komplementär*, wenn jedes Element Komplemente hat.

V heißt *distributiv*, falls für alle $x, y, z \in V$ gilt:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Ein *Boolescher Verband* ist ein komplementärer, distributiver Verband.

Bemerkung: Einen Booleschen Verband vom Rang $n < \infty$ notieren wir mit \mathcal{B}_n .

Es gilt:

$$S(\underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-mal}}) \cong \mathcal{B}_n \cong \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

Die endlichen Booleschen Verbände sind also genau die endlichen Potenzmengenverbände und der Teilerverband $S(k_1, \dots, k_n)$ ist eine Verallgemeinerung des Booleschen Verbandes.

Lemma 2.4 *In einem Booleschen Verband hat jedes Element x genau ein Komplement x' .*

Beweis: Seien x' und x'' Komplemente von x , d.h. es gelte: $x \wedge x' = \mathbf{0}$, $x \vee x' = \mathbf{1}$ und $x \wedge x'' = \mathbf{0}$, $x \vee x'' = \mathbf{1}$ und somit insbesondere: $x \wedge x' = x \wedge x''$, $x \vee x' = x \vee x''$. Mit Ausnutzung der Kommutativität, Absorption und der modularen Ungleichung in Verbänden zeigen wir:

$$\begin{aligned} x' &= x' \wedge (x \vee x') = x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') \\ &= (x \wedge x'') \vee (x' \wedge x'') = (x \vee x') \wedge x'' = (x \vee x'') \wedge x'' = x'' \end{aligned}$$

□

2.2.2 Der lineare Verband

Definition 2.12 *Der Verband der linearen Unterräume $\mathcal{L}(n, K)$ heißt linearer Verband.*

Die linearen Verbände spielen in der Kombinatorik eine wichtige Rolle, weil sie interessante Eigenschaften aufweisen, die keine anderen Verbände haben. Deshalb wird der Begriff des linearen Verbandes in der Literatur unterschiedlich definiert.

Beispielsweise besagt der Satz von Veblen-Young, dass jede projektive Geometrie ab Rang 4 isomorph zu einem Unterraumverband ist, so dass Aigner [1], Seiten 105-107, über diese Eigenschaft den linearen Verband definiert. In [3], Seiten 261 und 467, wird von Grätzer eine Definition über Partitionsverbände und Äquivalenzrelationen gegeben.

Bemerkung: Der lineare Verband ist zwar im Allgemeinen nicht distributiv ², es gilt aber eine Abschwächung des Distributivgesetzes, das *Modularitätsgesetz*:

$$U_2 \subseteq W \Rightarrow (U_1 + U_2) \cap W = (U_1 \cap W) + U_2$$

Die rechte Seite ist klarerweise in der linken enthalten. Sei umgekehrt $w \in (U_1 + U_2) \cap W$. Wenn wir $w = u_1 + u_2$ für $u_i \in U_i$ schreiben, folgt, dass u_1 in W liegt, weil w und u_2 zu W gehören. Also ist $u_1 + u_2 \in (U_1 \cap W) + U_2$.

Definition 2.13 *Verbände, die das Modularitätsgesetz*

$$x \geq z \Rightarrow (x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$$

oder äquivalent dazu die Identität

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

erfüllen, heißen modular.

Distributive Verbände sind modular, jedoch nicht umgekehrt, wie das Beispiel des linearen Verbandes zeigt.

Lemma 2.5 *Der lineare Verband ist komplementär, wobei der Komplementärraum U' eines linearen Unterraums U von V im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.*

Beweis: Wir nennen U und U' *unabhängig*, wenn ihr Durchschnitt Null ist, das heißt, wenn für alle $u \in U$ und $u' \in U'$ gilt:

$$u + u' = \mathbf{0} \Rightarrow u = u' = \mathbf{0}$$

Nach Zorns Lemma gibt es einen maximalen Unterraum U' , der unabhängig von U ist. Bleibt zu zeigen, dass $U + U' = \mathbf{1} = V$ ist.

Sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Liegt v in U' , so liegt v auch in $U + U'$.

Im Fall $v \notin U'$ muss $U' + \mathbf{R}v$ abhängig von u sein. Es existieren also $u \in U$,

²Das Distributivgesetz $(U_1 + U_2) \cap W = (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W)$ gilt nicht, wenn $\dim(V) \geq 2$

$u' \in U'$, $\alpha \in \mathbf{R}$ mit $u = u' + \alpha v \neq \mathbf{0}$. Weil U und U' unabhängig sind, muss $\alpha \neq 0$ sein. Es folgt

$$v = \frac{1}{\alpha}(u - u') \in U + U'$$

Die Nicht-Eindeutigkeit des Komplementär-raums ist offensichtlich. Beispielsweise ist jeder 1-dimensionale Unterraum W komplementär zu jedem $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum W' , der W nicht enthält. \square

Wie wir noch sehen werden, sind die linearen Verbände in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung der Booleschen Verbände.

3 Symmetrische Kettenzerlegungen

Definitionen 3.1 *Eine symmetrische Kette ist eine Kette, dessen Elemente aufeinanderfolgend symmetrisch um den mittleren Rang angeordnet sind, d. h. eine Kette $x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-k}$ für ein $k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ mit $r(x_i) = i$.*

Eine symmetrische Kettenzerlegung einer partiell geordneten Menge ist eine Zerlegung in disjunkte, symmetrische Ketten, dessen Vereinigung die gesamte Menge ist.

Eine Menge, die in symmetrische Ketten zerlegbar ist, heißt symmetrische Kettenordnung

Unser Ziel ist es nun, hinreichende Kriterien für die Existenz von symmetrischen Kettenzerlegungen zu finden und insbesondere den linearen Verband explizit in symmetrische Ketten zu zerlegen.

Symmetrische Kettenzerlegungen sind in vielerlei Hinsicht sinnvoll und haben schöne Konsequenzen.

Hat man beispielsweise eine symmetrische Kettenzerlegung des endlichen Booleschen Verbandes \mathcal{B}_n gefunden, so kann man damit den Satz von Sperner beweisen.

Der erste Beweis des Satzes von Sperner über die Zerlegung von \mathcal{B}_n wurde von de Bruijn, Tengbergen und Kruyswijk [5] im Jahre 1952 gegeben.

Später wurden zwei direkte Methoden, den Verband $S(k_1, \dots, k_n)$ - und damit insbesondere \mathcal{B}_n - in symmetrische Ketten zu zerlegen, gefunden:

1. Der lexikographische Algorithmus ³ von Aigner [2]
2. Der Klammeralgorithmus von Greene und Kleitmann [6] und unabhängig davon Leeb [unveröffentlicht]

Mit beiden Methoden erhält man dieselbe Kettenzerlegung.

Griggs [4] wies 1977 die Existenz einer symmetrischen Kettenzerlegung des linearen Verbandes nach und Frank Vogt und Bernd Voigt [14] gelang es 1994, eine solche Zerlegung explizit per Induktion anzugeben.

³aus dem Englischen von der Verfasserin übersetzt: lexicographic matching algorithm

3.1 Zerlegung des Teilerverbandes

Satz 3.1 (de Bruijn et al) *Die Menge $S(k_1, \dots, k_n)$ der Teiler von $m := p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ ist eine symmetrische Kettenordnung.*

Beweis: Wir führen den Beweis per Induktion über die Anzahl n der verschiedenen Primteiler von m .

Notiere abkürzend $r(S(k_1, \dots, k_n)) = k_1 + \dots + k_n =: k$.

Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.

Angenommen, die Behauptung gelte für m . Dann ist zu zeigen, dass sie auch für $m_1 = m \cdot p^\lambda$, wobei p prim ist und m nicht teilt, gilt.

Ist $\{d_1, \dots, d_r\}$ die Teilermenge von m , so ist $\{d_1 p^\alpha, \dots, d_r p^\alpha \mid \alpha = 0, \dots, \lambda\}$ die Teilermenge von m_1 . Sei $d_i \mid \dots \mid d_{k-i}$ eine symmetrische Kette der Zerlegung der Teilermenge von m . Dann kann die Menge

$$\{d_i p^\alpha, \dots, d_{k-i} p^\alpha \mid \alpha = 0, \dots, \lambda\}$$

in symmetrische Ketten von Teilern von m_1 zerlegt werden. Dies wird anhand folgenden Schemas veranschaulicht:

$$\begin{array}{c|c|c} d_i & d_{i+1} & \dots d_{k-i} \\ d_i p & d_{i+1} p & \dots d_{k-i} p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_i p^{\lambda-1} & d_{i+1} p^{\lambda-1} & \dots d_{k-i} p^{\lambda-1} \\ \hline d_i p^\lambda & d_{i+1} p^\lambda & \dots d_{k-i} p^\lambda \end{array}$$

Dann sind die Ketten

$$\begin{array}{c} d_i \mid d_i p \mid \dots \mid d_i p^{\lambda-1} \mid d_i p^\lambda \mid d_{i+1} p^\lambda \mid \dots \mid d_{k-i} p^\lambda \\ d_{i+1} \mid d_{i+1} p \mid \dots \mid d_{i+1} p^{\lambda-1} \mid \dots \mid d_{k-i} p^{\lambda-1} \\ \vdots \\ d_{k-i} \end{array}$$

symmetrisch in der Teilermenge von m_1 und bilden die gesuchte Zerlegung. \square

Die Schlüsselidee dieses Beweises wurde u. a. von Aigner [2], Seiten 284ff, benutzt, um ein weiteres wichtiges Kriterium für die Existenz einer symmetrischen Kettenzerlegung zu beweisen:

3.2 Das Produkttheorem

Satz 3.2 (Das Produkttheorem) *Sind M und N symmetrische Kettenordnungen, so auch das Produkt $M \times N$.*

Beweis: Seien \mathcal{S}_M und \mathcal{S}_N symmetrische Kettenzerlegungen von M und N . Wir greifen ein Kettenpaar (C, D) mit

$$C = c_0 < \dots < c_h \in \mathcal{S}_M \text{ und } D = d_0 < \dots < d_k \in \mathcal{S}_N$$

heraus. Es seien $r(c_0) = r, r(c_h) = R$ und $r(d_0) = s, r(d_k) = S$. Da C und D symmetrisch sind, gilt:

$$r + R = r(M) \text{ und } s + S = r(N)$$

Wir konstruieren nun Ketten $E_j(C, D)$ in $M \times N$ wie folgt:
Für $j = 0, \dots, \min\{h, k\}$ definieren wir

$$E_j(C, D) := (c_0, d_j) < \dots < (c_{h-j}, d_j) < (c_{h-j}, d_{j+1}) < \dots < (c_{h-j}, d_k)$$

Der Rang des kleinsten Elementes von $E_j(C, D)$ in $M \times N$ ist $r + s + j$, der des größten Elementes $R - j + S$. Also ist wegen

$$(r + s + j) + (R - j + S) = r(M) + r(N) = r(M \times N)$$

$E_j(C, D)$ eine symmetrische Kette in $M \times N$. Ferner sind die E_j paarweise disjunkt und füllen ganz $M \times N$ aus. Wir erhalten

$$\bigcup_{C \in \mathcal{S}_M} \bigcup_{D \in \mathcal{S}_N} \bigcup_{j=0, \dots, \min\{h, k\}}$$

als symmetrische Kettenzerlegung von $M \times N$. □

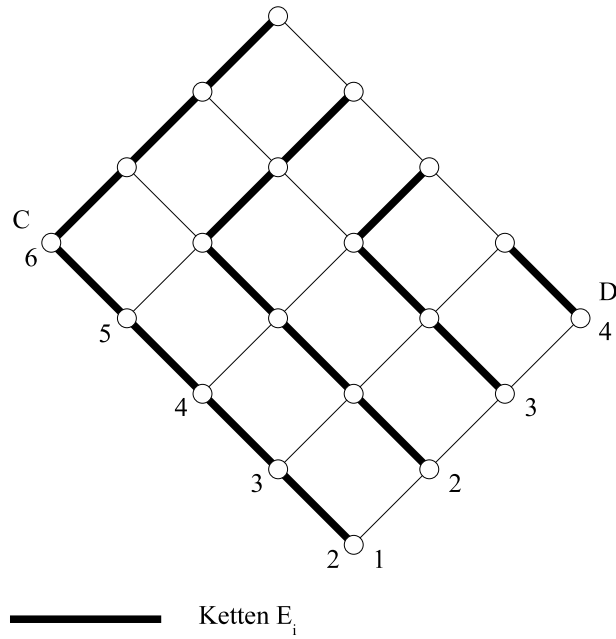
Beispiel: $C = 2 < 3 < 4 < 5 < 6, D = 1 < 2 < 3 < 4$

$$E_0 = (2, 1) < (3, 1) < (4, 1) < (5, 1) < (6, 1) < (6, 2) < (6, 3) < (6, 4)$$

$$E_1 = (2, 2) < (3, 2) < (4, 2) < (5, 2) < (5, 3) < (5, 4)$$

$$E_2 = (2, 3) < (3, 3) < (4, 3) < (4, 4)$$

$$E_3 = (2, 4) < (3, 4)$$

Abbildung 8: Zerlegung des Kettenproduktes $C \times D$

Wenden wir diese Methode auf das Kettenprodukt $S(k_1, \dots, k_n)$ an, so ist dies

Der lexikographische Algorithmus: (für $n = 2$)

$$S(k_1, k_2) = (0 < 1 < \dots < k_1) \times (0 < 1 < \dots < k_2)$$

Sei $\mathbb{E} \ k_1 \leq k_2$. Dann zerlegen wir $S(k_1, k_2)$ in folgende symmetrische Ketten E_0, \dots, E_{k_1} :

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0) < \dots < (k_1, 0) < (k_1, 1) < \dots < (k_1, k_2) \\ E_1 &= (0, 1) < \dots < (k_1 - 1, 1) < (k_1 - 1, 2) < \dots < (k_1 - 1, k_2) \\ &\vdots \\ E_{k_1} &= (0, k_1) < \dots < (0, k_2) \end{aligned}$$

Dabei durchläuft eine Kette E_j die Ränge j bis $k_1 + k_2 - j$ und hat die Länge $k_1 + k_2 + 1 - 2j$.

Das Produkttheorem erlaubt uns, viele symmetrische Kettenordnungen zu konstruieren.

Eine wichtige Klasse solcher Ordnungen sind nach Birkhoff [9], Seite 91, die komplementären, modularen Verbände endlicher Länge. Diese lassen sich darstellen als Produkt von gewissen Intervallen, die wiederum symmetrische Kettenordnungen sind.

Folgerung: Der lineare Verband $\mathcal{L}(n, K)$ ist eine symmetrische Kettenordnung.

Bemerkung: Bezrukov und Engel [7] stellten fest, dass die Eigenschaft der symmetrischen Kettenordnung auch unter den Operationen Parallelverknüpfung und Rangprodukt erhalten bleibt, jedoch i. A. nicht unter Serienverknüpfung, Ordnungsprodukt und Exponentiation.

Im Folgenden werde ich die zweite Methode, den Verband $S(k_1, \dots, k_n)$ in symmetrische Ketten zu zerlegen, beschreiben:

3.3 Der Klammeralgorithmus

Der Klammeralgorithmus: Jedem $a = (a_1, \dots, a_n) \in S(k_1, \dots, k_n)$ ordnen wir eine Folge von $\sum_{i=1}^n k_i$ runden öffnenden und schließenden Klammern wie folgt zu: Zuerst a_1 schließende Klammern, dann $k_1 - a_1$ öffnende Klammern, dann a_2 schließende Klammern, dann $k_2 - a_2$ öffnende Klammern usw. Zum Beispiel erhalten wir für $a = (1, 2, 0, 1, 3) \in S(2, 3, 1, 2, 5)$ die Folge:

) ()) (() ())) ((

Dabei ist die Anzahl der schließenden Klammern gleich dem Rang von a : $a_1 + \dots + a_n$.

Jede solche Folge von linken und rechten Klammern hat eine eindeutige *Klammerung* wie folgt: wir schließen alle Paare von benachbarten öffnenden und schließenden Klammern und alle Paare, die solche Paare umschließen. Das machen wir so oft, bis keine Paarung mehr möglich ist. In obigem Beispiel erhalten wir:

) ()) (() ())) ((

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$

Als *Klammerung* bezeichnen wir nun die Vereinigung der „gepaarten“ Elemente.

Die verbleibenden, d. h. die „nicht gepaarten“, Klammern bilden eine Folge von schließenden, gefolgt von öffnenden Klammern, in unserem Fall:

$$) \) \) \ (\ ($$

Jetzt definieren wir eine Partition von $S(k_1, \dots, k_n)$, indem wir sagen, dass zwei Elemente zum selben Block gehören, wenn sie dieselbe Klammerung haben, z. B. liegt das Element $b = (0, 1, 0, 1, 2)$, dem die Folge

$$(\underbrace{(\)}_{\text{Block 1}} \ (\underbrace{(\)}_{\text{Block 2}} \underbrace{(\)}_{\text{Block 3}}) \ (\ ($$

zugeordnet wird, im selben Block wie obiges $a = (1, 2, 0, 1, 3)$.

Betrachten wir die nicht gepaarten Klammern, so sehen wir, dass jeder Block eine symmetrische Kette bildet. Somit erhalten wir eine symmetrische Kettenzerlegung.

Die folgende Tafel zeigt, welche Elemente in derselben Kette liegen wie $a = (1, 2, 0, 1, 3)$.

ungepaarte Klammern	Klammerfolge	Element
((((((<u>()</u> (<u>(() ())</u> ((((0, 1, 0, 1, 2)
) (((() <u>()</u> (<u>(() ())</u> ((((1, 1, 0, 1, 2)
)) ((() <u>()</u>) <u>(() ())</u> ((((1, 2, 0, 1, 2)
))) (() <u>()</u>) <u>(() ())</u>) (((1, 2, 0, 1, 3)
)))) () <u>()</u>) <u>(() ())</u>)) ((1, 2, 0, 1, 4)
)))))) <u>()</u>) <u>(() ())</u>)))	(1, 2, 0, 1, 5)

Bemerkung: Metropolis, Rota, Strehl und White [10] erarbeiteten einen analogen Klammeralgorithmus, um folgende zwei Verbände in symmetrische Ketten zu zerlegen:

- Den Kubischen Verband \mathcal{C}_n :
Die Menge aller Seiten eines n -dimensionalen Würfels (ausschließlich

der leeren Menge als Seite) ist partiell geordnet bezüglich Enthaltenseinsrelation „ \subseteq “.

Wir betrachten den diskreten Würfel $\{a = (a_1, \dots, a_n) | a_i \in \{0, 1\}\}$. Seine Seiten sind die Teilmengen der Form

$$\left\{ a | a_i \begin{cases} \in \{0, 1\} & \text{falls } i \notin I \\ = \alpha_i & \text{falls } i \in I \end{cases}, I \subseteq \{1, \dots, n\}, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ fest} \right\}$$

Wir erhalten den Kubischen Verband, indem wir ein minimales Element hinzufügen.

- Den Funktionenverband F_k^n :
Die Menge aller teilweise definierten Funktionen $f : N \rightarrow K$ einer n -Menge N in eine k -Menge K ist partiell geordnet durch:

$$f \leq g :\Leftrightarrow D(f) \subseteq D(g) \text{ und } \forall x \in D(f) : f(x) = g(x)$$

Dabei ist $D(f)$ der Definitionsbereich von f .

Eine *teilweise definierte Funktion* $f : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$ kann repräsentiert werden durch einen n -Tupel $a = (a_1, \dots, a_n)$, wobei

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in D(f) \\ j & \text{falls } i \notin D(f) \text{ und } f(x_i) = y_j \end{cases}$$

Wir erhalten den Funktionenverband, indem wir ein maximales Element hinzufügen.

Lemma 3.1 *Das Produkttheorem und der Klammeralgorithmus liefern dieselbe symmetrische Kettenzerlegung von $S(k_1, \dots, k_n)$.*

Beweis: (für $n = 2$)

$$S(k_1, k_2) = (0 < 1 < \dots < k_1) \times (0 < 1 < \dots < k_2)$$

Sei $\mathbb{E} \ k_1 \leq k_2$.

Der Kette $E_0 = (0, 0) < \dots < (k_1, 0) < (k_1, 1) < \dots < (k_1, k_2)$, konstruiert

nach dem Produkttheorem bzw. dem Algorithmus von Aigner, entspricht im Klammeralgorithmus der Block, in dem kein Element „gepaart“ ist, d. h.:

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (0, 0) \\
) \quad \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_1-1 \text{ Stück}} & \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (1, 0) \\
 & \vdots & \\
 \underbrace{) \quad) \quad \dots \quad)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (k_1, 0) \\
 \underbrace{) \quad) \quad \dots \quad)}_{k_1 \text{ Stück}} &) \quad \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2-1 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (k_1, 1) \\
 & \vdots & \\
 \underbrace{) \quad) \quad \dots \quad)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{) \quad) \quad \dots \quad)}_{k_2 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (k_1, k_2)
 \end{array}$$

Der Kette $E_1 = (0, 1) < \dots < (k_1 - 1, 1) < (k_1 - 1, 2) < \dots < (k_1 - 1, k_2)$ entspricht der Block mit genau einem gepaarten Element (markiert durch fettgedruckte Klammern (\quad)):

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2-1 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (0, 1) \\
) \quad \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_1-1 \text{ Stück}} & \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2-1 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (1, 1) \\
 & \vdots & \\
 \underbrace{) \quad \dots \quad)}_{k_1-1 \text{ Stück}} & (\quad) \quad \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2-1 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (k_1 - 1, 1) \\
 \underbrace{) \quad \dots \quad)}_{k_1-1 \text{ Stück}} & (\quad) \quad) \quad \underbrace{(\quad \dots \quad)}_{k_2-1 \text{ Stück}} & \leftrightarrow (k_1 - 1, 2) \\
 & \vdots & \\
 \underbrace{) \quad \dots \quad)}_{k_1-1 \text{ Stück}} & (\quad) \quad) \quad) \quad \dots \quad) & \leftrightarrow (k_1 - 1, k_2)
 \end{array}$$

Schließlich entspricht der Kette $E_{k_1} = (0, k_1) < \dots < (0, k_2)$ der Block mit

maximaler Anzahl k_1 gepaarter Elemente:

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\left(\dots \left(\right) \right)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{\left(\dots \right)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{\left(\left(\dots \left(\right) \right) \right)}_{k_2 - k_1 \text{ Stück}} \leftrightarrow (0, k_1) \\
 \underbrace{\left(\dots \left(\right) \right)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{\left(\dots \right)}_{k_1 + 1 \text{ Stück}} & \underbrace{\left(\left(\dots \left(\right) \right) \right)}_{k_2 - k_1 - 1 \text{ Stück}} \leftrightarrow (0, k_1 + 1) \\
 & & \vdots \\
 \underbrace{\left(\dots \left(\right) \right)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{\left(\dots \right)}_{k_1 \text{ Stück}} & \underbrace{\left(\right) \dots \left(\right)}_{k_2 - k_1 \text{ Stück}} \leftrightarrow (0, k_2)
 \end{array}$$

Somit sind die Ketten aus dem Produkttheorem dieselben wie die aus dem Klammeralgorithmus. \square

Aufbauend auf die Idee des Algorithmus von Aigner finden wir

3.4 Das Matchingkriterium

Definition 3.2 Ein Matching in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $M \subseteq E$ von paarweise nicht inzidenten Kanten.

M heißt perfekt, falls M alle Knoten aus V überdeckt.

Somit können wir den Begriff *Matching* auch auf Ordnungen übertragen, denn zu jeder Ordnung gehört mit Hilfe des Hassediagramms ein Graph.

Orientieren wir die Matchingkanten jeweils von unten nach oben, d. h. von dem Element niedrigeren Ranges zu dem Element höheren Ranges, so können wir folgende Begriffe definieren:

Definition 3.3 Ein Matching auf einer Ordnung (M, \leq) mit zugehörigem Graphen $G = (V, E)$ zerlegt die überdeckten Knoten in obere Knoten V_o und untere Knoten V_u . Durch die Ordnung M werden auf V_o und V_u jeweils Teilordnungen induziert. Wir bezeichnen die den induzierten Ordnungen zugehörigen Graphen mit oberer Graph $G_o = (V_o, E_o)$ und unterer Graph $G_u = (V_u, E_u)$.

Beispiel: Ein perfektes Matching auf dem Booleschen Verband \mathcal{B}_3 :

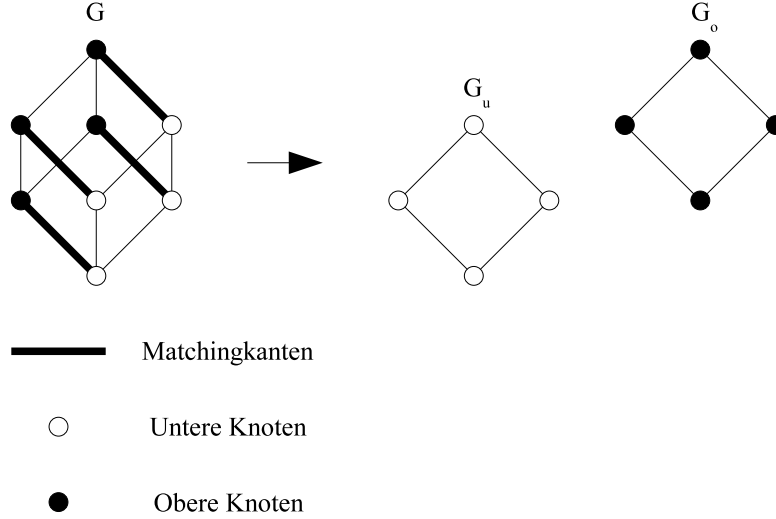


Abbildung 9: Oberer und unterer Graph von \mathcal{B}_3

Wir können ein Matching also als bijektive Abbildung $f_M : V_u \rightarrow V_o$ interpretieren, wobei gilt: $\forall v \in V_u : f(v) > v$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das *Matchingkriterium* formulieren:

Satz 3.3 (Das Matchingkriterium) *Sei $G = (V, E)$ der Graph einer Ordnung vom Rang $n < \infty$. Falls es ein perfektes, ordnungserhaltendes Matching f gibt mit $r(f(v)) = r(v) + 1$, so dass G_u oder G_o eine symmetrische Kettenordnung von Rang $n - 1$ ist, so ist auch G eine symmetrische Kettenordnung.*

Beweis: Sei (M, \leq) die zugrundeliegende Ordnung mit $r(M) = n < \infty$.

Sei $\mathfrak{C} G_u$ eine symmetrische Kettenordnung von Rang $n - 1$.

Das n -te Niveau M_n enthält ausschließlich Knoten aus V_o , denn angenommen, es existiert ein Knoten $v \in V_u$ mit $r(v) = n$. Dann gilt:

$$r(f(v)) > r(v) + 1 = n + 1$$

Dies ist aber unmöglich, da $f(v)$ wegen $f(v) \in V_o$ auch ein Knoten aus V ist und somit maximal Rang n haben kann.

Analog besteht das 0-te Niveau M_0 nur aus Knoten aus V_u .

Für $x \in M_n$ gilt $x \in V_o$, also $f^{-1}(x) \in V_u$ und $r(f^{-1}(x)) = r(x) - 1 = n - 1$.

Somit gibt es in M_{n-1} Knoten aus V_u .

Da G_u Rang $n - 1$ hat, enthalten alle Niveaus M_0, M_1, \dots, M_{n-1} Elemente aus V_u . Sei für $i = 0, \dots, n - 1$ jeweils x_i ein solches Element, d. h. $x_i \in V_u$ und $r(x_i) = i$. Dann gilt:

$$f(x_i) \in V_o \text{ und } r(f(x_i)) = r(x_i) + 1 = i + 1$$

Somit enthalten alle Niveaus M_1, M_2, \dots, M_n Elemente aus V_o .

Sei $V_u = K_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} K_l$ die symmetrische Kettenzerlegung in G_u . Dann gibt es zu jeder Kette K_i ein $l_i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$, so dass die Elemente von K_i genau die Ränge l_i bis $n - l_i - 1$ durchlaufen. Wir ordnen jeder Kette $K_i \subseteq V_u$ eine eindeutige Kette $\tilde{K}_i \subseteq V_o$ folgendermaßen zu:

$$K_i = a_{l_i} < \dots < a_{n-l_i-1} \rightarrow \tilde{K}_i := f(a_{l_i}) < \dots < f(a_{n-l_i-1})$$

Da f eine ordnungserhaltende Abbildung ist, ist dies tatsächlich eine Kette in V_o .

Nach Voraussetzung gilt: $a_{n-l_i-1} < f(a_{n-l_i-1})$. Also können wir zwei (bzw. im Fall n ungerade, $l_i = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ eine) neue Kette(n) konstruieren:

1. Fall: n gerade oder $l_i \neq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$:

Wir konstruieren aus K_i und \tilde{K}_i zwei neue Ketten E_{i_1} und E_{i_2} folgendermaßen:

$$E_{i_1} := a_{l_i} < \dots < a_{n-l_i-1} < f(a_{n-l_i-1})$$

und

$$E_{i_2} := f(a_{l_i}) < \dots < f(a_{n-l_i-2})$$

d. h. wir schneiden das maximale Element von \tilde{K}_i ab und setzen es mit der Machingkante auf die Kette K_i . Die „abgeschnittene“ Kette E_{i_2} läuft jetzt von Rang $l_i + 1 = r(f(a_{l_i}))$ bis Rang $n - l_i - 1 = r(f(a_{n-l_i-2}))$, also von Rang k_i bis Rang $n - k_i$ für ein

$$k_i \in \begin{cases} \{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\} & \text{falls } l_i \neq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ \{1, \dots, \frac{n}{2}\} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

In jedem Fall gilt also $k_i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ und somit ist E_{i_2} nach Definition symmetrisch in dem zugrundeliegenden Graphen G .

Die Kette E_{i_1} durchläuft alle Ränge von $l_i = r(a_{l_i})$ bis $n - l_i = r(f(a_{n-l_i-1}))$

für $l_i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\} \subseteq \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, ist also auch symmetrisch in G .

2. Fall: n ungerade und $l_i = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$:

Es gilt: $K_i = a_{l_i}$ und $\tilde{K}_i = f(a_{l_i})$ sind einelementige Ketten. Daraus konstruieren wir

$$E_i := a_{l_i} < f(a_{l_i})$$

als zweielementige Kette. Diese läuft von Rang $l_i = r(a_{l_i}) = \frac{n-1}{2}$ bis Rang $l_i + 1 = r(f(a_{l_i})) = \frac{n+1}{2}$ und ist damit symmetrisch in G .

Es bleibt zu zeigen: Jeder Knoten in V liegt in genau einer der Ketten E_{i_1}, E_{i_2}, E_i , d. h. es entsteht eine symmetrische Kettenzerlegung von G .

Dazu: Die Disjunktheit der Ketten ist klar, da K_i und \tilde{K}_i disjunkt sind.

Sei $x \in V = V_o \dot{\cup} V_u$ beliebig.

1. Fall: $x \in V_u \Rightarrow \exists i : x \in K_i$.

Dann gilt:

$$x \in \begin{cases} E_{i_1} & \text{falls } n \text{ gerade oder } l_i \neq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ E_i & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Fall: $x \in V_o \Rightarrow f^{-1}(x) \in V_u$ Dann gilt:

$$x \in \begin{cases} E_{i_1} & \text{falls } (n \text{ gerade oder } l_i \neq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) \text{ und } f^{-1}(x) = a_{n-l_i-1} \\ E_{i_2} & \text{falls } (n \text{ gerade oder } l_i \neq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) \text{ und } f^{-1}(x) \neq a_{n-l_i-1} \\ E_i & \text{sonst} \end{cases}$$

□

Lemma 3.2 *Der endliche Boolesche Verband \mathcal{B}_n erfüllt die Voraussetzungen des Matchingkriteriums.*

Beweis: Wir konstruieren ein Matching f , das die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Wegen $r(\emptyset) = |\emptyset| = 0$ gilt $\emptyset \in V_u$. Der Rang von $f(\emptyset)$ muss also 1 sein, d. h. $f(\emptyset) \in \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$. Wähle nun ein $f(\emptyset) \in \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ beliebig. Definiere

$$\begin{aligned} V_u &:= \mathcal{P}(\{1, \dots, n\} \setminus f(\emptyset)) = \text{Ideal}(\{1, \dots, n\} \setminus f(\emptyset)) \\ V_o &:= \mathcal{B}_n \setminus V_u = \text{Filter}(f(\emptyset)) \end{aligned}$$

Es gilt also für $X \in \mathcal{B}_n$:

$$\begin{aligned} X \in V_o &\Leftrightarrow f(\emptyset) \subseteq X \\ X \in V_u &\Leftrightarrow f(\emptyset) \not\subseteq X \end{aligned}$$

Wir definieren das Matching f durch:

$$\text{Für } A \in V_u : f(A) := A \vee f(\emptyset) = A \cup f(\emptyset)$$

Dann ist f eine Abbildung wie gefordert, denn:

- $V_o \dot{\cup} V_u = (\mathcal{B}_n \setminus V_u) \dot{\cup} V_u = \mathcal{B}_n$
- $f : V_u \rightarrow V_o$ ist wohldefiniert, denn: $\forall A \in \mathcal{B}_n : f(\emptyset) \subseteq f(A) = A \cup f(\emptyset)$, also $f(A) \in V_o$
- Für $A, B \in V_u$ gilt: $f(A) = f(B) \Leftrightarrow A \cup f(\emptyset) = B \cup f(\emptyset) \Rightarrow A = B \Rightarrow f$ injektiv
- Für $B \in V_o$ ist $f^{-1}(B) = B \setminus f(\emptyset) \in V_u \Rightarrow f$ surjektiv
- Für $A, B \in V_u$ gilt: $A \subseteq B \Leftrightarrow f(A) = A \cup f(\emptyset) \subseteq B \cup f(\emptyset) = f(B) \Rightarrow f$ ordnungserhaltend
- Für $A \in V_u$ gilt: $f(A) = A \cup f(\emptyset) \supset A$ und $|f(A)| = |A| + 1$

Außerdem ist $G_u = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\} \setminus f(\emptyset)) \cong \mathcal{B}_{n-1}$ nach Induktion eine symmetrische Kettenordnung und hat Rang $n - 1$. \square

Bemerkung: Da es n verschiedene Möglichkeiten der Wahl von $f(\emptyset)$ gibt, haben wir sogar gezeigt, dass es n verschiedene solcher Matchings gibt.

Auf den linearen Verband ist das Matchingkriterium in dieser Form nicht anwendbar, jedoch in einer leicht abgeänderten Form:

Satz 3.4 *Sei $G = (V, E)$ der Graph einer Ordnung vom Rang $n < \infty$. Falls es ein ordnungserhaltendes Matching f gibt mit $r(f(v)) = r(v) + 1$, so dass G_u oder G_o eine symmetrische Kettenordnung vom Rang $n - 1$ ist und die exponierten, d. h. die nicht überdeckten, Knoten in G in symmetrische Ketten zerlegbar sind, so auch G .*

Dies wird später im Algorithmus von Vogt und Voigt benutzt, um den linearen Verband in symmetrische Ketten zu zerlegen.

Dass eine solche Zerlegung existiert, hat nach Birkhoff auch Griggs [4] folgendermaßen gezeigt:

3.5 Zerlegung des linearen Verbandes

Definitionen 3.4 Sei (M, \leq) eine partiell geordnete Menge mit Rangfunktion r und $r(M) = n$ und sei $N_k := |M_k|$ die Anzahl der Elemente vom Rang k . Dann hat M die LYM-Eigenschaft, falls für jede Antikette $F \subseteq M$ gilt:

$$\sum_{x \in F} \frac{1}{N_{r(x)}} \leq 1$$

(LYM-Ungleichung)

Die normalisierte Matching-Eigenschaft ⁴, beschreiben wir wie folgt:

Ist A eine beliebige Teilmenge von M_k und A^* die Menge aller oberen Nachbarn (Nachfolgermenge) von A in M_{k+1} , d. h.

$$A^* = \{b \in M_{k+1} \mid \exists a \in A : b \text{ ist oberer Nachbar von } a\}$$

und für jedes k gilt:

$$\frac{|A|}{N_k} \leq \frac{|A^*|}{N_{k+1}}$$

(normalisierte Matching-Ungleichung)

Kleitmann [11] bewies das folgende

Lemma 3.3 Für eine partiell geordnete Menge (M, \leq) mit Rangfunktion r gilt:

M hat die LYM-Eigenschaft $\Rightarrow M$ hat die normalisierte Matching-Eigenschaft

Beweis: M habe die LYM-Eigenschaft, $A \subseteq M_k$ sei eine Menge von Elementen von Rang k .

⁴aus dem Englischen von der Verfasserin übersetzt: normalized matching property

Dann ist die Menge $A \cup (M_{k+1} \setminus A^*)$ eine Antikette in M . Also gilt nach der LYM-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 1 &\geq \sum_{x \in A \cup (M_{k+1} \setminus A^*)} \frac{1}{N_{r(x)}} = \sum_{x \in A} \frac{1}{N_{r(x)}} + \sum_{x \in M_{k+1} \setminus A^*} \frac{1}{N_{r(x)}} \\
 &= \sum_{x \in A} \frac{1}{N_k} + \sum_{x \in M_{k+1} \setminus A^*} \frac{1}{N_{k+1}} \\
 &= \frac{|A|}{N_k} + \frac{|M_{k+1}| - |A^*|}{N_{k+1}} \\
 &= \frac{|A|}{N_k} + 1 - \frac{|A^*|}{N_{k+1}}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow M$ hat die normalisierte Matching-Eigenschaft. \square

Bemerkung: In obigem Lemma gilt sogar Äquivalenz.

Definition 3.5 Sei $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ eine Familie von Mengen. Eine Menge $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ von paarweise verschiedenen Elementen x_i heißt System verschiedener Repräsentanten (SDR), von \mathcal{X} , falls gilt:

$$x_i \in X_i \text{ für } 1 \leq i \leq m \text{ und } x_i \neq x_j$$

Lemma 3.4 Seien $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ zwei Mengenfamilien. Dann existiert ein gemeinsames SDR (CSDR), d. h. eine Menge, die sowohl \mathcal{A} als auch \mathcal{B} repräsentiert, genau dann, wenn gilt:

$$\forall X \subseteq \mathcal{A}, Y \subseteq \mathcal{B} : |X| + |Y| \leq m + \left| \bigcup_{X_j \in X} X_j \cap \bigcup_{Y_j \in Y} Y_j \right|$$

Bemerkung: Lemma 3.4 wurde von Ford und Fulkerson [12] aufgestellt und bewiesen mit Hilfe des Max Flow-Min Cut Theorems.

Nun können wir ein weiteres wichtiges Kriterium für die Existenz einer symmetrischen Kettenzerlegung beweisen:

Satz 3.5 Sei (M, \leq) eine partiell geordnete Menge mit Rangfunktion r und $r(M) = n$ und sei $N_k := |M_k|$ die Anzahl der Elemente vom Rang k . M habe folgende Eigenschaften:

- (1) $N_0 = N_n \leq N_1 = N_{n-1} \leq N_2 = N_{n-2} \leq \dots \leq N_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = N_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$
- (2) die LYM-Eigenschaft

Dann ist (M, \leq) eine symmetrische Kettenordnung.

Beweis: Wegen Lemma 3.3 erfüllt M die normalisierte Matching-Ungleichung. Wir zeigen nun, wie man unter Ausnutzung des Lemmas 3.4 eine symmetrische Kettenzerlegung von M konstruieren kann.

Angenommen, n ist ungerade, d. h. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Aus Eigenschaft (1) und der normalisierten Matching-Ungleichung folgt:

$$\forall A \subseteq M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} : |A| \leq |A^*|$$

wobei $A^* \subseteq M_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ die Nachfolgermenge von A ist.

Nach dem Heiratssatz von Hall gibt es somit ein Matching zwischen $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ und $M_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Wir bilden eine neue geordnete Menge (M', \leq) vom Rang $n-1$, indem wir die zwei Elemente eines Matchingpaares jeweils als eins betrachten. M' erfüllt (1) und (2).

Dies reduziert das Problem auf den Fall n gerade, bei dem es nur einen mittleren Rang, $\frac{n}{2}$, gibt.

Wegen der normalisierten Matching-Eigenschaft von M folgt für $X \subseteq M_{\frac{n}{2}+1}$:

$$\frac{|\bigcup_{X_j \in X} X_j|}{N_{\frac{n}{2}}} \geq \frac{|X|}{N_{\frac{n}{2}+1}}$$

und für $Y \subseteq M_{\frac{n}{2}-1}$:

$$\frac{|\bigcup_{Y_j \in Y} Y_j|}{N_{\frac{n}{2}}} \geq \frac{|Y|}{N_{\frac{n}{2}-1}}$$

Somit wegen (1):

$$\begin{aligned}
|X| + |Y| &\leq \frac{|\bigcup_{X_j \in X} X_j|}{N_{\frac{n}{2}}} \cdot N_{\frac{n}{2}+1} + \frac{|\bigcup_{Y_j \in Y} Y_j|}{N_{\frac{n}{2}}} \cdot N_{\frac{n}{2}-1} \\
&= \frac{N_{\frac{n}{2}+1}}{N_{\frac{n}{2}}} (|\bigcup_{X_j \in X} X_j| + |\bigcup_{Y_j \in Y} Y_j|) \\
&\leq \frac{N_{\frac{n}{2}+1}}{N_{\frac{n}{2}}} (N_{\frac{n}{2}} + |\bigcup_{X_j \in X} X_j \cap \bigcup_{Y_j \in Y} Y_j|) \\
&\leq N_{\frac{n}{2}+1} + |\bigcup_{X_j \in X} X_j \cap \bigcup_{Y_j \in Y} Y_j|
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4 existiert also ein gemeinsames SDR von $M_{\frac{n}{2}+1}$ und $M_{\frac{n}{2}-1}$. Somit können die drei mittleren Ränge von M in symmetrische Ketten der Längen 1 und 3 zerlegt werden. Analog zum Fall n ungerade können wir nun eine neue partiell geordnete Menge vom Rang $n - 2$ konstruieren, die wieder (1) und (2) erfüllt.

Der Satz folgt dann aus Induktion über n .

□

Engel und Gronau [13], Seiten 37f, haben gezeigt, dass die Bedingung (2) in Satz 3.5 ersetzt werden kann durch:

(2') Für jedes k hat jedes Element vom Rang k dieselbe Anzahl α_k an unteren Nachbarn in M_{k-1} und dieselbe Anzahl β_k an oberen Nachbarn in M_{k+1} .

Folgerung: Der lineare Verband $\mathcal{L}(n, K)$ ist eine symmetrische Kettenordnung.

Dies werden wir nun genauer untersuchen.

4 Der Algorithmus von Vogt und Voigt

Vogt und Voigt [14] gelang es erstmals, eine induktive Konstruktion für eine symmetrische Kettenzerlegung des linearen Verbandes $\mathcal{L}(n, K)$ herzuleiten.

Die Konstruktion ist eine Anwendung der in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren zur Zerlegung des Booleschen Verbandes.

Wir gehen im Folgenden von einem festen endlichen Körper K aus und notieren abkürzend $\mathcal{L}(n)$ für $\mathcal{L}(n, K)$.

Vogt und Voigt führten zunächst die partiell geordnete Menge $\mathcal{L}_t(n)$ ein, die wegen $\mathcal{L}_0(n) = \mathcal{L}(n)$ eine Verallgemeinerung des linearen Verbandes darstellt. Diese Menge wird in geeignete Klassen unterteilt, so dass wir auf den ersten beiden Klassen ein ordnungserhaltendes Matching definieren können. Ferner zeigen wir induktiv, dass diese beiden Klassen jeweils symmetrische Kettenordnungen vom Rang $n - 1$ sind. Die exponierten Elemente, d. h. die übrigen Klassen, sind jeweils isomorph zu gewissen $\mathcal{L}_{t'}(n - 1)$ und liegen symmetrisch in $\mathcal{L}_t(n)$. Wir können also aus der Zerlegbarkeit von $\mathcal{L}_{t'}(n - 1)$ per Induktion und mit Hilfe des Matchingkriteriums 3.4 auf die Zerlegbarkeit von $\mathcal{L}_t(n)$ schließen.

Erreichen wir unser Ziel, die Menge $\mathcal{L}_t(n)$ für alle t und n in symmetrische Ketten zu zerlegen, so haben wir insbesondere eine Zerlegung von $\mathcal{L}(n)$ gefunden.

Der Algorithmus von Vogt und Voigt löst die Aufgabe der Zerlegung von $\mathcal{L}_t(n)$. Da dazu viele technische Details notwendig sind, beschreiben wir einleitend den ersten Schritt des Algorithmus, angewendet auf $\mathcal{L}(n)$. Ab dem zweiten Abschnitt wird der Algorithmus vollständig erklärt, bevor im letzten Abschnitt noch einmal auf den Spezialfall $t = 0$ eingegangen wird.

4.1 Dreiteilung von $\mathcal{L}(n)$

Für $n = 1$ ist $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}(1) = \{0, K\}$ eine symmetrische Kettenordnung.

Im Fall $n > 1$ unterteilen wir $\mathcal{L}(n)$ zunächst in drei Klassen. Die erste Klasse sind alle Unterräume, dessen Elemente als erste Komponente Null haben. Dies sind genau alle Unterräume der Hyperebene $H := \langle e_2, \dots, e_n \rangle$. Die zweite Klasse bilden die Oberräume der „x-Achse“ $\langle e_1 \rangle$. Die Menge aller übrigen

Räume bezeichnen wir mit Δ_1 . Wir haben also die Unterteilung

$$\mathcal{L}(n) = \text{Ideal}(H) \dot{\cup} \text{Filer}(\langle e_1 \rangle) \dot{\cup} \Delta_1$$

Dabei sind

$$\text{Ideal}(H) = [\mathbf{0}, H] \cong \mathcal{L}(n-1)$$

und

$$\text{Filer}(\langle e_1 \rangle) = [\langle e_1 \rangle, \mathbf{1}] \cong \mathcal{L}(n-1)$$

nach Induktionsvoraussetzung symmetrische Kettenordnungen vom Rang $n-1$.

Als Matching definieren wir

$$\begin{aligned} f : \text{Ideal}(H) &\rightarrow \text{Filter}(\langle e_1 \rangle) \\ U &\mapsto U \vee \langle e_1 \rangle = U + \langle e_1 \rangle \end{aligned}$$

Hier besteht eine Analogie zum Booleschen Verband, wo das Matching $f(A) = A \vee f(\emptyset)$ die Voraussetzungen des Matchingkriteriums erfüllen. Das Element $\langle e_1 \rangle$ hat im linearen Verband jedoch neben H weitere Komplemente, während im Booleschen Verband jedes Element, also insbesondere $f(\emptyset)$, ein eindeutiges Komplement hat. Deshalb wird auch deutlich, warum das Matching in $\mathcal{L}(n)$ nicht perfekt ist, im Gegensatz zu dem Matching in \mathcal{B}_n .

Wie für den Booleschen Verband in Lemma 3.2 können wir jetzt für den linearen Verband folgendes Lemma formulieren:

Lemma 4.1 $\mathcal{L}(n) \setminus \Delta_1$ erfüllt die Voraussetzungen des Matchingkriteriums.

Beweis: Zu zeigen ist, dass das oben definierte Matching die Voraussetzungen des Matchingkriteriums erfüllt. Definiere

$$\begin{aligned} V_u &:= \text{Ideal}(H) \\ V_o &:= \text{Filter}(\langle e_1 \rangle) \end{aligned}$$

Dann ist f eine Abbildung wie gefordert, denn:

- V_o und V_u sind disjunkt.

- $f : V_u \rightarrow V_o$ ist wohldefiniert, denn: $\forall U \in \text{Ideal}(H) : f(U) = U + \langle e_1 \rangle$ ist ein Oberraum von $\langle e_1 \rangle$, also $f(U) \in V_o$
- Für $U, V \in V_u$ gilt: $f(U) = f(V) \Leftrightarrow U + \langle e_1 \rangle = V + \langle e_1 \rangle \Rightarrow U = V \Rightarrow f$ injektiv
- Jedes $U \in V_o$ hat eine Darstellung $U = \langle e_1 \rangle + X$ mit $X \in \text{Ideal}(H)$, also ist $f^{-1}(U) = X \in V_u \Rightarrow f$ surjektiv
- Für $U, V \in V_u$ gilt: $U \subseteq V \Leftrightarrow f(U) = U + \langle e_1 \rangle \subseteq V + \langle e_1 \rangle = f(V) \Rightarrow f$ ordnungserhaltend
- Für $U \in V_u$ gilt: $f(U) = U + \langle e_1 \rangle \supset U$ und $\dim(f(U)) = \dim(U) + 1$

Außerdem ist $G_o = \text{Filter}(e_1) = [\langle e_1 \rangle, 1] \cong \mathcal{L}(n - \dim \langle e_1 \rangle) = \mathcal{L}(n - 1)$ nach Induktion eine symmetrische Kettenordnung von Rang $n - 1$.

Nach dem Matchingkriterium 3.3 folgt das Lemma. \square

Der erste Iterationsschritt des Algorithmus von Vogt und Voigt kann somit graphisch folgendermaßen dargestellt werden:

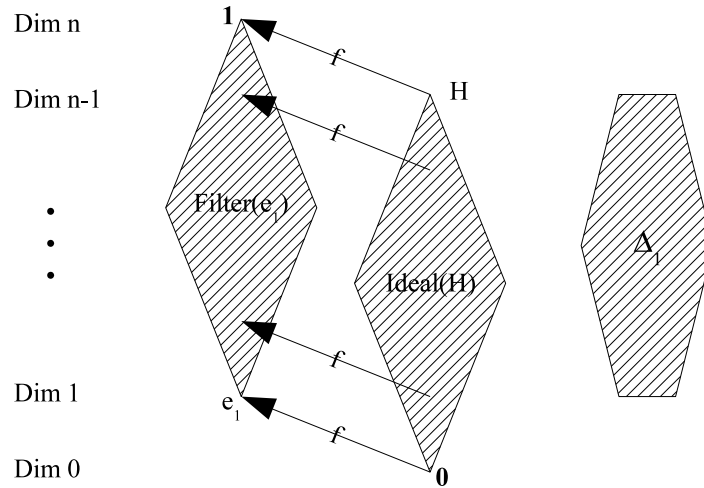


Abbildung 10: Erster Iterationsschritt

Gemäß Satz 3.4 genügt es also, die exponierten Elemente, d. h. Δ_1 , in symmetrische Ketten zu zerlegen, um eine Zerlegung von $\mathcal{L}(n)$ zu konstruieren. Dies erreichen wir mit dem Algorithmus von Vogt und Voigt [14], der zu Δ_1 isomorphe Mengen in symmetrische Ketten zerlegt.

Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen.

Um mit den Elementen des linearen Verbandes „rechnen“ zu können, benötigen wir den Begriff der *Schubert-Normalform*.

4.2 Schubert-Normalform

Mit $a \in K^n$ meinen wir im Allgemeinen Spaltenvektoren. Zeilenvektoren bezeichnen wir mit a^T , wenn es nicht eindeutig ist, ob es sich um Zeilen oder Spalten handelt.

Definition 4.1 *Eine Matrix $A \in K^{n \times k}$, $k \leq n$, mit Zeilen a_1, \dots, a_n hat Schubert-Normalform, falls gilt:*

- (1) *Es gibt $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, so dass a_{i_j} der j -te k -Einheitsvektor e_j ist.*
- (2) *Jedes a_i ist Linearkombination der e_1, \dots, e_l mit $i_l \leq i \leq i_{l+1}$.*

Die Zeilen i_1, \dots, i_k nennen wir *aufspannende Einheitsvektoren*.

Eine Matrix in Schubert-Normalform hat also folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & \\
 * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & \\
 * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & \ddots & & \\
 * & * & * & * & \cdots & * & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 * & * & * & * & \cdots & * & * \\
 \vdots & & & & & & \\
 * & * & * & * & \cdots & * & *
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \mathbf{0} \\
 \vdots \\
 \mathbf{0} \\
 e_1 = a_{i_1} \\
 \in \langle e_1 \rangle \\
 \vdots \\
 \in \langle e_1 \rangle \\
 e_2 = a_{i_2} \\
 \in \langle e_1, e_2 \rangle \\
 \vdots \\
 \in \langle e_1, e_2 \rangle \\
 e_3 = a_{i_3} \\
 \vdots \\
 \in \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle \\
 e_k = a_{i_k} \\
 \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle \\
 \vdots \\
 \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle
 \end{array}$$

Wegen $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = k$ spannen die Spalten einer Matrix A in Schubert-Normalform einen k -dimensionalen linearen Unterraum U von K^n auf. Genauer gesagt beschreibt A die Einbettung von K^k in K^n , wobei K^k auf U abgebildet wird.

Zu jedem k -dimensionalen Unterraum $U \subseteq K^n$ gibt es genau eine Matrix in Schubert-Normalform, dessen Spalten U generieren.

Im Folgenden identifizieren wir Unterräume mit Matrizen in Schubert-Normalform oder schreiben $\langle A \rangle$, wenn wir den zur Schubert-Matrix A gehörigen Unterraum meinen.

Lemma 4.2 *Sei A in $(n \times k)$ -Schubert-Normalform, B in $(n \times m)$ -Schubert-Normalform mit $A \subseteq B$ (aufgefasst als Unterräume). Dann gibt es eine Matrix C in $(m \times k)$ -Schubert-Normalform, so dass $A = B \cdot C$.*

Beweis: Wegen $A \subseteq B$ ist jede Spalte von A Linearkombination der Spalten von B . Also existiert eine Matrix $C \in K^{m \times k}$, so dass $A = B \cdot C$.

B habe die Zeilen i_1, \dots, i_m als aufspannende Einheitsvektoren. Wir betrachten die Untermatrix B' von B , die nur aus den Zeilen i_1, \dots, i_m besteht, d. h. $B' = I_m$. Dann gilt: $A' = B' \cdot C = I_m \cdot C = C$, wobei A' die Untermatrix von A ist, die aus den Zeilen i_1, \dots, i_m besteht.

Es bleibt zu zeigen, dass A' alle k -ten aufspannenden Einheitsvektoren aus A enthält.

Behauptung: Alle Zeilen von A , die nicht in A' liegen, sind Linearkombinationen der Zeilen in A' darüber, mit anderen Worten:

$$a_i \text{ Zeile von } A \setminus A', i_l \leq i \leq i_{l+1}$$

$$\Rightarrow a_i \in \langle a_{i_1}, \dots, a_{i_l} \rangle, \text{ d. h. } \exists \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l} : a_i = \sum_{k=i_1}^{i_l} \alpha_k a_k$$

Dazu: Sei a_i eine Zeile von $A \setminus A'$ und l so, dass $i_l \leq i \leq i_{l+1}$. Dann gilt nach den Gesetzen der Matrixmultiplikation: $a_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} c_k$, wobei c_k die k -te Zeile von C ist. Wegen $A' = C$ gilt $c_k = a_{i_k}$. Somit:

$$a_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{i_k} \stackrel{b_i \in \langle e_1, \dots, e_l \rangle}{=} \sum_{k=1}^l b_{ik} a_{i_k} = \sum_{k=i_1}^{i_l} \alpha_k a_k$$

mit $\alpha_{i_k} := b_{ik}$.

\Rightarrow Behauptung.

Somit müssen alle k -Einheitsvektoren, die vorhanden sind, da A Schubert-Normalform hat, in A' liegen. \square

Folgerung: In Lemma 4.2 gilt sogar Äquivalenz.

Bemerkung: Sei U ein k -dimensionaler Unterraum von K^n bzw. eine $(n \times k)$ -Matrix in Schubert-Normalform.

Streichen wir eine Spalte von U , so entfernen wir einen aufspannenden Vektor und erhalten einen $(k-1)$ -dimensionalen Unterraum U' von K^n . Insbesondere

gilt bei Streichung der j -ten Spalte:

$$U' = U \cdot \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{j-1}^T \\ \mathbf{0}^T \\ e_j^T \\ \vdots \\ e_{k-1}^T \end{pmatrix}$$

und U' hat wieder Schubert-Normalform.

Streichen wir eine Zeile, die nicht eine der aufspannenden Einheitsvektoren ist, und gilt $n > k$, so betten wir U in K^{n-1} ein und erhalten $U' = U$ als k -dimensionalen Unterraum von K^{n-1} .

Lemma 4.3 Sei $U = \left(e_1 \middle| \frac{\mathbf{0}^T}{U'} \right)$ in Schubert-Normalform, also ein Unterraum in $\mathcal{L}(n, K)$. Dann ist U die Summe aus e_1 und $\left(\frac{\mathbf{0}^T}{U'} \right)$, aufgefasst als Unterräume:

$$U = \langle e_1 \rangle + \left\langle \left(\frac{\mathbf{0}^T}{U'} \right) \right\rangle$$

Beweis: Allgemein gilt für Vektoren $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in K^n$:

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle + \langle b_1, \dots, b_l \rangle = \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \rangle$$

Da $\left(\frac{\mathbf{0}^T}{U'} \right)$ in Schubert-Normalform ist, folgt die Behauptung. \square

4.3 Eine Unterteilung

Wir gehen nun von einem festen endlichen Körper K aus und bezeichnen die Menge aller k -dimensionalen Unterräume von K^n , $k \leq n$, mit $\mathcal{L}\binom{n}{k}$. Dann ist $\mathcal{L}(n, K) =: \mathcal{L}(n) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{L}\binom{n}{k}$ der lineare Verband.

Die entscheidende Definition ist die der Menge $\mathcal{L}_t\binom{n}{k}$:

Definition 4.2 Für $t \geq 0, 0 \leq k \leq n$ definieren wir

$$\mathcal{L}_t \binom{n}{k} := \left\{ \left(\frac{E_t}{A} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) \in \mathcal{L} \binom{t+n}{t+k} \mid \text{Rg}(A) = t \right\}$$

$$\mathcal{L}_t(n) := \bigcup_{k=0}^n \mathcal{L}_t \binom{n}{k}$$

Dabei ist E_t die $(t \times t)$ -Einheitsmatrix und $\text{Rg}(A)$ der Rang von A .

Bemerkung: Es gilt:

- In der Blockmatrix $\left(\frac{E_t}{A} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right)$ ist $A \in K^{n \times t}$, d. h. A hat vollen Spaltenrang.
- A hat mindestens k Nullzeilen.
- B ist in $(n \times k)$ -Schubert-Normalform.
- $\mathcal{L}_t(n) = \emptyset$ für $n < t$.
- $\mathcal{L}_t \binom{n}{k} = \emptyset$ für $n - k < t$, denn die Matrix A hat maximal $n - k$ Nichtnullzeilen und der Zeilenrang von A ist t .
- $\mathcal{L}_t(n)$ ist eine Menge von gewissen $t, t+1, \dots, n-1$ und n -dimensionalen Unterräumen von K^{t+n} und $C \in \mathcal{L}_t \binom{n}{k}$ ist ein $(t+k)$ -dimensionaler Unterraum von K^{t+n} .
- $\mathcal{L}_0(n) = \mathcal{L}(n)$.
- $\mathcal{L}_t(n)$ ist für $t > 0$ zwar eine partiell geordnete Menge, aber kein Verband, denn es existiert weder ein eindeutiges Nullelement $\mathbf{0}$ noch ein eindeutiges Einselement $\mathbf{1}$.

Nun unterteilen wir den linearen Verband in vier Klassen und können dann das Matchingkriterium 3.4 anwenden:

Da B in der Blockmatrix $\left(\frac{E_t}{A} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right)$ in Schubert-Normalform ist, hat B als erste Zeile entweder den ersten k -Einheitsvektor e_1 oder die Nullzeile. So erhalten wir folgende Unterteilung:

1. Die erste Zeile von B ist die Nullzeile.

- (a) Die erste Zeile a^T von A ist linear abhängig (l. a.) von den anderen Zeilen.

Wir wählen $A' \in K^{(n-1) \times t}$ so, dass $A = \left(\begin{array}{c} a^T \\ A' \end{array} \right)$. Dann ist A' durch A eindeutig bestimmt und $\text{Rg}(A') = \text{Rg}(A) = t$, da a^T l. a. von den Zeilen von A' ist.

Gilt $a^T = \mathbf{0}^T$, so hat A' mindestens $k - 1$ Nullzeilen, andernfalls mindestens k .

Wähle $B' \in K^{(n-1) \times k}$ so, dass $B = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}^T \\ B' \end{array} \right)$. B' ist in $((n-1) \times k)$ -Schubert-Normalform.

Wir definieren für $a \in K^t$:

$$\mathcal{L}_t^{a,-}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A') = t, a^T \text{ l. a. von } A' \right\}$$

und erhalten als erste Klasse

$$\bigcup_{a \in K^t} \mathcal{L}_t^{a,-}(n)$$

- (b) Die erste Zeile a^T von A ist linear unabhängig (l. u.) von den anderen Zeilen.

Wähle A' wie oben. Dann ist $\text{Rg}(A') = \text{Rg}(A) - 1 = t - 1$, da a^T l. u. von den Zeilen von A' ist.

Wegen $a^T \neq \mathbf{0}^T$ hat A' mindestens k Nullzeilen.

Behauptung:

$$\exists b \in \mathcal{L} \binom{t}{1} : A' \cdot b = \mathbf{0}, a^T \cdot b \neq 0 \quad (*)$$

Wähle B' wie oben. B' ist in $((n-1) \times k)$ -Schubert-Normalform.

Wegen (*) gilt:

$$\begin{aligned}
 & \bigcup_{a \in K^t} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A') = t-1, \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. a^T \text{ l. u. von } A' \right\} \\
 &= \bigcup_{a \in K^t, b \in \mathcal{L}_1^t} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A') = t-1, \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. A'b = \mathbf{0}, a^T b \neq 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Wir definieren für $a \in K^t, b \in \mathcal{L}_1^t$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n) &:= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A') = t-1, \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left(\frac{a^T}{A'} \right) b = \mathbf{0}, a^T b \neq 0 \right\}
 \end{aligned}$$

und erhalten als zweite Klasse

$$\bigcup_{a \in K^t, b \in \mathcal{L}_1^t} \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$$

2. Die erste Zeile von B ist e_1 .

Dann ist die erste Zeile von A die Nullzeile.

Wähle $A'' \in K^{(n-1) \times t}$ so, dass $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ A'' \end{pmatrix}$. Dann ist A'' durch A eindeutig bestimmt und $\text{Rg}(A'') = \text{Rg}(A) = t$, da $\mathbf{0}^T$ l. a. von den Zeilen von A'' .

Wähle $B'' \in K^{(n-1) \times (k-1)}, x \in K^{n-1}$ so, dass $B = \left(\begin{array}{c|c} e_1^T \\ \hline x & B'' \end{array} \right)$.

(a) x ist l. a. von den Spalten von A'' .

Dann gibt es ein $c \in K^t$ mit $A''c = x$ und wir definieren:

$$\mathcal{L}_t^{c,+}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} E_{t+1} & & \mathbf{0} \\ \hline A'' & A''c & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A'') = t \right\}$$

und erhalten als dritte Klasse

$$\bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$$

(b) x ist l. u. von den Spalten von A'' .

In diesem Fall gilt $\text{Rg}(A''|x) = t + 1$ und wir erhalten als letzte Klasse

$$\Delta := \left\{ \left(\frac{E_{t+1}}{A} \mid \frac{\mathbf{0}}{B''} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A) = t + 1 \right\}$$

Beweis von ():* Wir bezeichnen die Spalten von A' mit A'_l .

A' hat t Spalten, also gibt es wegen $\text{Rg}(A') = t - 1$ eine Spalte A'_i , die l. a. von den anderen Spalten ist. Seien β_l so, dass $A'_i = \sum_{l=1, l \neq i}^t \beta_l A'_l$ bzw.

$$\sum_{l=1}^t \beta_l A'_l = 0 \text{ und } \beta_i = -1$$

Sei m minimal so, dass $\beta_m \neq 0$, d. h. $\beta_1 = \dots = \beta_{m-1} = 0$ und $\beta_m \neq 0$. Wegen $\beta_i = -1$ gilt $m \leq i$.

Setze

$$b_l := \begin{cases} 1 & \text{falls } l = m \\ 0 & \text{falls } l \in \{1, \dots, m-1\} \\ -\frac{1}{\beta_m} & \text{falls } l = i \\ \frac{\beta_l}{\beta_m} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: $b_1 = \dots = b_{m-1} = 0, b_m = 1$, also $b \in \mathcal{L}_t^{(t)}$.

Ferner:

$$\begin{aligned} A'b &= \sum_{s=1}^t A'_s b_s = A'_m + \sum_{s=m+1}^t A'_s b_s = A'_m - \frac{1}{\beta_m} A'_i + \sum_{s=m+1, s \neq i}^t A'_s \frac{\beta_s}{\beta_m} \\ &= A'_m - \frac{1}{\beta_m} A'_i + \frac{1}{\beta_m} \underbrace{\sum_{s=m+1, s \neq i}^t A'_s \beta_s}_{= A'_i - \beta_m A'_m} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Angenommen, es gilt $a^T \cdot b = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{l=1}^t a_l b_l = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{l=1}^{m-1} a_l \underbrace{\beta_l}_{=0} + a_m - a_i \frac{1}{\beta_m} + \sum_{l=m+1, l \neq i}^t a_l \frac{\beta_l}{\beta_m} = 0 \\
&\Rightarrow a_i = \sum_{l=m, l \neq i}^t a_l \beta_l \\
&\stackrel{\beta_1 = \dots = \beta_{m-1} = 0}{\Rightarrow} a_i = \sum_{l=1, l \neq i}^t a_l \beta_l \\
&\Rightarrow \left(\frac{a_i}{A'_i} \right) = \sum_{l=1, l \neq i}^t \beta_l \left(\frac{a_l}{A'_l} \right) \\
&\Rightarrow \text{Spalten von } A \text{ sind nicht l. u.} \\
&\Rightarrow A \text{ hat nicht vollen Spaltenrang} \\
&\Rightarrow \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

□

Somit haben wir folgende Unterteilung in vier disjunkte Klassen:

$$\mathcal{L}_t(n) = \bigcup_{a \in K^t} \mathcal{L}_t^{a,-}(n) \dot{\cup} \bigcup_{a \in K^t, b \in \mathcal{L}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 1 \end{smallmatrix}\right), a^T \cdot b \neq 0} \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n) \dot{\cup} \bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c,+}(n) \dot{\cup} \Delta$$

Diese werden wir nun im Einzelnen genauer untersuchen.

Zunächst beobachten wir folgende Isomorphismen:

Lemma 4.4 *Für jedes $a \in K^t$ ist*

$$\mathcal{L}_t^{a,-}(n) \cong \mathcal{L}_t(n-1)$$

Beweis: Die Elemente aus $\mathcal{L}_t^{a,-}(n)$ sind $(t+k)$ -dimensionale Unterräume von K^{t+n} . Dabei ist $k < n$, denn der einzige $(t+n)$ -dimensionale Unterraum ist

K^{t+n} - bzw. als Matrix E_{t+n} - und liegt für $n = 0$ in $\mathcal{L}_t^{c,+}(n)$. Im Fall $n \neq 0$ liegt K^{t+n} nicht einmal in $\mathcal{L}_t(n)$.

Also können wir die Räume aus $\mathcal{L}_t^{a,-}(n)$ in K^{t+n-1} einbetten. Dies machen wir wie schon erwähnt mit einer Abbildung, die eine Zeile ungleich einem Einheitsvektor streicht:

$$\begin{aligned} \Psi_a : \mathcal{L}_t^{a,-}(n) &\rightarrow \mathcal{L}_t(n-1) \\ \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \end{aligned}$$

Als Einbettung ist Ψ_a injektiv und wegen $A' \in K^{(n-1) \times t}$ und $\text{Rg}(A') = t$ surjektiv, also bijektiv und offensichtlich linear.

Seien $U := \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right), V := \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A'' & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t^{a,-}(n)$ und $U \subseteq V$,

aufgefasst als Unterräume. Dann gibt es nach Lemma 4.2 eine Matrix C in Schubert-Normalform, so dass $U = V \cdot C$. Nach den Gesetzen der Matrixmultiplikation hat C die Blockgestalt $\left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline X & Y \end{array} \right)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A'' & B'' \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline X & Y \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline A'' & B'' \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline X & Y \end{array} \right) \end{aligned}$$

und damit $\Psi_a(U) \subseteq \Psi_a(V)$, also ist Ψ_a ein ordnungserhaltender Isomorphismus. \square

Lemma 4.5 Für jedes $a \in K^t$ und jedes $b \in \mathcal{L}_1^{(t)}$ ist

$$\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n) \cong \mathcal{L}_{t-1}(n-1)$$

Beweis: Die Elemente aus $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ sind $(t+k)$ -dimensionale Unterräume von

K^{t+n} und es gilt $k < n$. Der Vektor $b \in \mathcal{L}_{(1)}^t$ hat die Gestalt

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}$$

Wir streichen von $U = \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline a^T & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ zunächst die i -te Spalte und erhalten einen $(t+k-1)$ -dimensionalen Unterraum U' von K^{t+n} , der insbesondere in U liegt. Es gilt

$$U' = U \cdot \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ \mathbf{0}^T \\ e_i^T \\ \vdots \\ e_{t+k-1}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{i-1}^T \\ \mathbf{0}^T \\ e_i^T \\ \vdots \\ e_{t-1}^T \\ \hline \tilde{a}^T & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ B' \end{pmatrix}$$

Dabei entsteht \tilde{a} aus a durch Streichung des i -ten Eintrags und \tilde{A} entsteht aus A durch Streichung der i -ten Spalte.

Nun betten wir U' in K^{t+n-2} ein, indem wir die i -te Zeile $\mathbf{0}^T$ und die $(t+1)$ -te Zeile $(\tilde{a}^T | \mathbf{0}^T)$ streichen.

Die Abbildung, die dies ausführt, ist

$$\Theta_{a,b} : \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n) \rightarrow \mathcal{L}_{t-1}(n-1)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline a^T & B' \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} E_{t-1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{A} & B' \end{array} \right)$$

$\Theta_{a,b}$ ist surjektiv, denn: Sei $Y = \left(\begin{array}{c|c} E_{t-1} & \mathbf{0} \\ \hline A & B \end{array} \right) \in \mathcal{L}_{t-1}(n-1)$. Füge in Y zunächst die Zeile $(\tilde{a}^T | \mathbf{0}^T)$ zwischen die $(t-1)$ -te und die t -te Zeile und die Nullzeile $\mathbf{0}^T$ zwischen die $(i-1)$ -te und die i -te Zeile ein. Dann fügen wir zwischen die i -te und die $(i+1)$ -te Spalte die Spalte $\left(\begin{array}{c} e_i \\ a_i \\ A_i \end{array} \right)$, wobei

$A_i = -\sum_{s=1, s \neq i}^t \tilde{A}_s b_s$. Dies ergibt das Urbild von Y .

Die Surjektivität von $\Theta_{a,b}$ folgt also im Wesentlichen daraus, dass die i -te Spalte von A' l. a. von den anderen Spalten ist.

Aus dem gleichen Grund ist $\Theta_{a,b}$ injektiv, denn für $Y = Y'$ in $\mathcal{L}_{t-1}(n-1)$ sind auch die nach obigem Muster konstruierten Urbilder gleich.

Da $\Theta_{a,b}$ offensichtlich linear ist, ist $\Theta_{a,b}$ ein Isomorphismus, der außerdem noch ordnungserhaltend ist, denn:

Seien $U := \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline a^T & B' \\ \hline A' & B' \end{array} \right), V := \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline a^T & B'' \\ \hline A'' & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ und $U \subseteq V$,

aufgefasst als Unterräume. Dann gibt es nach Lemma 4.2 eine Matrix C in Schubert-Normalform, so dass $U = V \cdot C$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline a^T & B' \\ \hline A' & B' \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline a^T & B'' \\ \hline A'' & B'' \end{array} \right) \cdot C \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} E_{t-1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{A} & B' \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c} E_{t-1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{A} & B'' \end{array} \right) \cdot C' \end{aligned}$$

Dabei sind \tilde{A} und C' die Matrizen, die aus A'' und C durch Streichung der i -ten Spalte entstehen.

Da C' in Schubert-Normalform ist, gilt $\Theta_{a,b}(U) \subseteq \Theta_{a,b}(V)$. \square

Lemma 4.6 Für jedes $c \in K^t$ ist

$$\mathcal{L}_t^{c,+}(n) \cong \mathcal{L}_t(n-1)$$

Beweis: Die Elemente aus $\mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ sind $(t+k)$ -dimensionale Unterräume von K^{t+n} .

Wir streichen von $U = \left(\begin{array}{c|c|c} E_{t+1} & \mathbf{0} & \\ \hline A'' & A''c & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ zunächst die $(t+1)$ -te Spalte. Dadurch erhalten wir einen $(t+k-1)$ -dimensionalen Unterraum U' von K^{t+n} , der insbesondere in U liegt. Es gilt:

$$U' = U \cdot \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_{t-1}^T \\ \mathbf{0}^T \\ e_t^T \\ \vdots \\ e_{t+k}^T \end{pmatrix}$$

Nun betten wir U' in K^{t+n-1} ein, indem wir die $(t+1)$ -te Zeile $\mathbf{0}^T$ streichen. Die Abbildung, die dies ausführt, ist

$$\begin{aligned} \Phi_c : \mathcal{L}_t^{c,+}(n) &\rightarrow \mathcal{L}_t(n-1) \\ \left(\begin{array}{c|c|c} E_{t+1} & \mathbf{0} & \\ \hline A'' & A''c & B'' \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \end{aligned}$$

Da die Spalte $A''c$ l. a. ist von den Spalten von A'' , führt Φ_c keine anderen Operationen aus als $\Theta_{a,b}$. Somit können wir mit derselben Argumentation wie in Beweis zu Lemma 4.5 zeigen, dass Φ_c ein ordnungserhaltender Isomorphismus ist. \square

Schließlich gilt nach Definition die Isomorphie

$$\Delta = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \mathbf{0} \\ \hline A & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n) \mid \text{Rg}(A) = t+1 \right\} \cong \mathcal{L}_{t+1}(n-1)$$

Nun untersuchen wir, wo genau die einzelnen Klassen in $\mathcal{L}_t(n)$ liegen.

Wie bereits erwähnt besteht $\mathcal{L}_t(n)$ aus gewissen $t, t+1, \dots, n-1$ und n -dimensionalen Unterräumen von K^{t+n} . Wir machen folgende interessante Beobachtungen:

Lemma 4.7 $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ besteht aus $t, t+1, \dots, n-1$ und n -dimensionalen Unterräumen von K^{t+n} , liegt also symmetrisch in $\mathcal{L}_t(n)$.

Beweis: $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ ist die Menge aller Matrizen $\left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n)$ mit

$\text{Rg}(A') = t - 1$, $A'b = \mathbf{0}$ und $a^T b \neq 0$.

Die t -dimensionalen Räume in $\mathcal{L}_t(n)$ entsprechen den Matrizen der Form

$\left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \\ \hline A' & \end{array} \right)$, wobei $\left(\frac{A'}{a^T} \right) \in K^{n \times t}$ vollen Spaltenrang hat. Da die Matrix B in

diesem Fall die leere Matrix ist, liegen diese Räume nicht in $\bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c,+}(n) \cup \Delta$.

Ist a^T l. u. von den Zeilen in A' , so gilt $\left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \\ \hline A' & \end{array} \right) \in \mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$. Somit existieren

in $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ Unterräume der Dimension t .

Die n -dimensionalen Räume in $\mathcal{L}_t(n)$ entsprechen den $((t+n) \times n)$ -Matrizen

$\left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{A} & \mathbf{0} \\ \hline A & B \end{array} \right)$ in Schubert-Normalform, wobei A vollen Spaltenrang t hat.

Wegen Spaltenrang=Zeilenrang hat A also mindestens t Nichtnullzeilen. Da A aber auch mindestens $k = n - t$ Nullzeilen hat, hat A genau $n - t$ Nullzeilen und t Nichtnullzeilen, die l. u. sind. Die Nullzeilen liegen genau dort, wo B die $n - t$ Einheitsvektoren hat. Ist also die erste Zeile von B eine Nullzeile, so ist die erste Zeile von A keine Nullzeile, also l. u. von den anderen Zeilen von A . Somit liegen diese Matrizen in $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$, d. h. in $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ existieren Unterräume der Dimension n .

Da wegen $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n) \cong \mathcal{L}_{t-1}(n-1)$ auch alle Dimensionen zwischen t und n von $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ durchlaufen werden, folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.8 *Für $t \geq n - 1$ ist die Menge Δ leer. Ansonsten besteht Δ aus $t+1, t+2, \dots, n-2$ und $(n-1)$ -dimensionalen Unterräumen von K^{t+n} , liegt also symmetrisch in $\mathcal{L}_t(n)$.*

Beweis: Δ ist die Menge aller Matrizen $\left(\begin{array}{c|c} \frac{E_{t+1}}{A} & \mathbf{0} \\ \hline A & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}_t(n)$ mit $\text{Rg}(A) =$

$t+1$. Da $A \in K^{(n-1) \times (t+1)}$ vollen Spaltenrang hat, muss gelten $t+1 \leq n-1$, d. h. für $t \geq n-1$ existiert keine Matrix A wie gefordert.

B'' habe $k \geq 0$ Spalten. Dann entsprechen die Matrizen in Δ Unterräumen von K^{t+n} der Dimension $t+1+k$.

A hat mindestens k Nullzeilen und maximal $n - 1 - k$ Nichtnullzeilen. Wegen $\text{Rg}(A) = t + 1 = \text{Zeilenrang}(A)$ muss gelten: $t + 1 \leq n - 1 - k$ bzw. $t + 1 + k \leq n - 1$. Die Räume in Δ haben also mindestens Dimension $t + 1$ und können maximal Dimension $n - 1$ haben. Da solche Räume tatsächlich vorhanden sind, z. B. $U := \left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \mathbf{0} \\ \hline E_{t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right) \in \Delta$, $\dim(\langle U \rangle) = t + 1$ und $V :=$

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{t+1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & E_{n-t-2} \\ \hline E_{t+1} & \mathbf{0} \end{array} \right) \in \Delta, \dim(\langle V \rangle) = n - 1 \text{ und wegen } \Delta \cong \mathcal{L}_{t+1}(n - 1)$$

auch alle Dimensionen zwischen $t + 1$ und $n - 1$ von Δ durchlaufen werden, folgt die Behauptung. \square

Nach Lemma 4.7 liegen in $\mathcal{L}_t^{a,-}(n)$ keine n -dimensionalen Unterräume und in $\mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ keine t -dimensionalen Räume. Aus den Isomorphismen

$$\mathcal{L}_t^{a,-}(n) \cong \mathcal{L}_t(n - 1) \cong \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$$

folgt, dass $\mathcal{L}_t^{a,-}(n)$ alle Ränge von t bis $n - 1$ und $\mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ alle Ränge von $t + 1$ bis n durchläuft.

Die folgende Graphik veranschaulicht die Lage der vier Klassen in $\mathcal{L}_t(n)$:

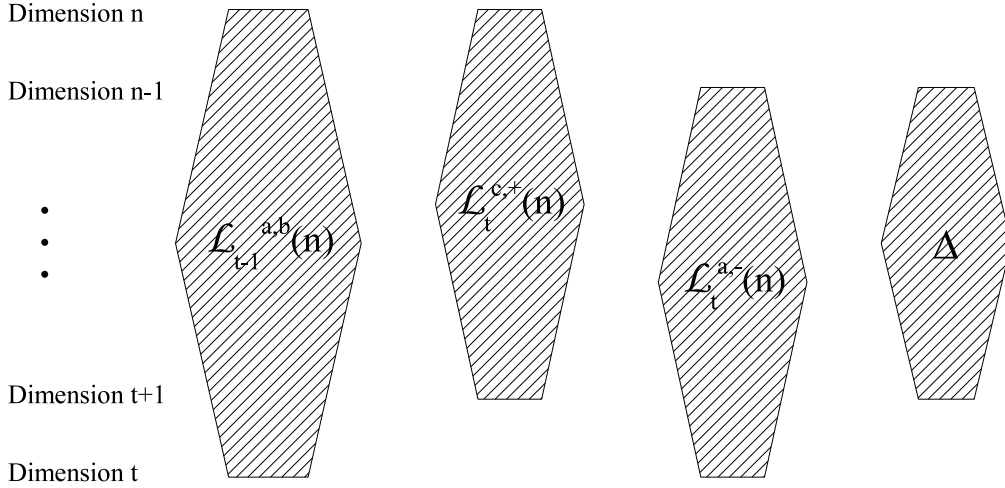


Abbildung 11: Lage der vier Klassen

4.4 Der Algorithmus

Mit den Vorbereitungen aus Abschnitt 4.3 konnten Vogt und Voigt [14], Seite 235ff, folgenden wichtigen Satz beweisen:

Satz 4.1 (Symmetrische Kettenzerlegung von $\mathcal{L}_t(\mathbf{n})$) Für jedes $t \geq 0$ und jedes $n \geq 0$ ist die partiell geordnete Menge $\mathcal{L}_t(n)$ eine symmetrische Kettenordnung.

Beweis: Wir beweisen den Satz per Induktion über n .
Für $n = 0$ ist

$$\mathcal{L}_t(n) = \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & \text{falls } t = 0 \\ \emptyset & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

und somit eine symmetrische Kettenordnung.

Sei jetzt $n > 0$. Wir wenden nun das Matchingkriterium 3.4 auf $\mathcal{L}_t(n)$ an, indem wir die Unterteilung

$$\mathcal{L}_t(n) = \bigcup_{a \in K^t} \mathcal{L}_t^{a,-}(n) \dot{\cup} \bigcup_{a \in K^t, b \in \mathcal{L}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 1 \end{smallmatrix}\right), a^T \cdot b \neq 0} L_{t-1}^{a,b}(n) \dot{\cup} \bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c,+}(n) \dot{\cup} \Delta$$

aus Abschnitt 4.3 benutzen. Zunächst betrachten wir die Menge

$$\bigcup_{a \in K^t} \mathcal{L}_t^{a,-}(n) \dot{\cup} \bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$$

und ordnen jedem Spaltenvektor $c \in K^t$ einen geeigneten Zeilenvektor a_c^T zu, so dass wir jeweils ein Matching $f_c : \mathcal{L}_t^{a_c,-}(n) \rightarrow \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ definieren können, das die Voraussetzungen des Matchingkriteriums erfüllt.

Die folgenden Hilfslemmata geben die notwendigen technischen Details:

Hilfslemma 4.9 Sei $T \in K^{t \times t}$ invertierbar. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_T : \mathcal{L}_t(n-1) &\rightarrow \mathcal{L}_t(n-1) \\ \left(\frac{E_t}{A} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) &\mapsto \left(\frac{E_t}{A \cdot T} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) \end{aligned}$$

ist ein ordnungserhaltender Isomorphismus. Hat T die spezielle Form

$$T = T_{a,c} = E_t + c \cdot a^T = \begin{pmatrix} 1 + a_1 c_1 & a_2 c_1 & \cdots & a_t c_1 \\ a_1 c_2 & 1 + a_2 c_2 & \cdots & a_t c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 c_t & a_2 c_t & \cdots & 1 + a_t c_t \end{pmatrix}$$

so gilt für $U \in \mathcal{L}_t^{a,-}(n)$, dass $U \subseteq \Phi_c^{-1} \Gamma_T^{-1} \Psi_a(U)$.

Beweis von Hilfslemma 4.9: Da T invertierbar ist, ist Γ_T bijektiv mit $\Gamma_T^{-1} = \Gamma_{T^{-1}}$. Außerdem ist Γ_T linear und somit ein Isomorphismus.

Seien $U := \left(\frac{E_t}{A_1} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right), V := \left(\frac{E_t}{A_2} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) \in \mathcal{L}_t(n-1)$ und $U \subseteq V$, aufgefasst als Unterräume. Dann gibt es nach Lemma 4.2 eine Matrix C in Schubert-Normalform, so dass $U = V \cdot C$. Nach den Gesetzen der Matrixmultiplikation hat C die Blockgestalt $\left(\frac{E_t}{X} \middle| \frac{\mathbf{0}}{Y} \right)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_t}{A_1} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) &= \left(\frac{E_t}{A_2} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) \cdot \left(\frac{E_t}{X} \middle| \frac{\mathbf{0}}{Y} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{E_t}{A_1 T} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) &= \left(\frac{E_t}{A_2 T} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B} \right) \cdot \left(\frac{E_t}{X T} \middle| \frac{\mathbf{0}}{Y} \right) \end{aligned}$$

und damit $\Gamma_T(U) \subseteq \Gamma_T(V)$, also ist Γ_T ordnungserhaltend.

Sei $U = \left(\frac{E_t}{a^T} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B'} \right) \in \mathcal{L}_t^{a,-}(n)$ und $B' \in K^{(n-1) \times k}$. Dann gilt:

$$\Phi_c^{-1} \Gamma_T^{-1} \Psi_a(U) = \left(\frac{E_{t+1}}{A' T^{-1}} \middle| \frac{\mathbf{0}}{A' T^{-1} c} \middle| \frac{\mathbf{0}}{B'} \right) \in \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$$

Aus

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_{t+1} & \mathbf{0} & \\ \hline A'T^{-1} & A'T^{-1}c & B' \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & E_k \end{array} \right) \stackrel{T=E_t+ca^T}{=} \left(\begin{array}{c|c} \frac{E_t}{a^T} & \mathbf{0} \\ \hline A' & B' \end{array} \right) = U$$

folgt die zweite Behauptung des Hilfslemmas. \square

Da Φ_c, Ψ_a und $\Gamma_{T_{a,c}}$ für $T_{a,c}$ invertierbar ordnungserhaltende Isomorphismen sind, ist dies auch die Abbildung $f := \Phi_c^{-1} \Gamma_{T_{a,c}}^{-1} \Psi_a$. Außerdem ist f nach dem Hilfslemma ein Matching und erfüllt zudem

$$\forall U \in \mathcal{L}_t^{a,-}(n) : \dim(f(U)) = t + 1 + k = \dim(U) + 1$$

Wir beobachten ferner, dass $\mathcal{L}_t^{a,-}(n) \cong \mathcal{L}_t(n-1) \cong \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ nach Induktionsannahme symmetrische Kettenordnungen vom Rang $n-1$ sind.

Wenn wir also jedem $c \in K^t$ ein $a \in K^t$ bijektiv so zuordnen können, dass die Matrix $T_{a,c}$ invertierbar ist, so bildet die Gesamtheit der Abbildungen

$$f = \Phi_c^{-1} \Gamma_{T_{a,c}}^{-1} \Psi_a =: f_c : \mathcal{L}_t^{a,-}(n) \rightarrow \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$$

ein Matching, das alle Elemente der Menge $\bigcup_{a \in K^t} \mathcal{L}_t^{a,-}(n) \cup \bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c,+}(n)$ überdeckt und die Voraussetzungen des Matchingkriteriums erfüllt.

Das folgende Hilfslemma löst die Aufgabe, a und c passend zuzuordnen:

Hilfslemma 4.10 *Für jedes t existiert eine bijektive Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_t : K^t &\rightarrow K^t \\ c &\mapsto a_c \end{aligned}$$

so dass die Matrizen $T_{a_c,c}$ invertierbar sind für jede Wahl von c .

Beweis von Hilfslemma 4.10: Falls $T_{a,c}$ eine inverse Matrix hat, so hat diese die Gestalt

$$T_{a,c}^{-1} = \frac{1}{1+a^T c} \cdot \begin{pmatrix} 1+a^T c - a_1 c_1 & -a_2 c_1 & \cdots & -a_t c_1 \\ -a_1 c_2 & 1+a^T c - a_2 c_2 & \cdots & -a_t c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 c_t & -a_2 c_t & \cdots & 1+a^T c - a_t c_t \end{pmatrix}$$

Es gilt also:

$$T_{a_c, c} \text{ invertierbar} \Leftrightarrow a^T c \neq -1$$

Für jedes $d \in K_{\neq 0}$ ist die Abbildung $\mu_d : K \rightarrow K$, definiert durch:

$$\mu_d(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{d}{x} + 1 & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

eine Bijektion mit $\mu_d(x)x \neq d$ für alle $x \in K$.

Also können wir φ rekursiv definieren:

Für $x \in K$:

$$\varphi_1(x) := \mu_{-1}(x)$$

und für $x \in K, v \in K^t$:

$$\varphi_{t+1}\left(\frac{v}{x}\right) := \left(\frac{\varphi_t(v)}{\mu_\alpha(x)}\right) \text{ mit } \alpha = -\varphi_t(v)^T v - 1$$

Wir zeigen induktiv, dass $\alpha \neq 0$ ist:

Für $t = 1$ ist $\alpha = -\varphi_1(v)v - 1 = -\mu_{-1}(v)v - 1 \neq 0$.

Für $t > 1$ ist $\alpha = -\varphi_t(v)^T v - 1$ mit $v = \left(\frac{\tilde{v}}{x}\right)$, $\tilde{v} \in K^{t-1}$, $x \in K$. Also:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\varphi_t\left(\left(\frac{\tilde{v}}{x}\right)\right)^T \left(\frac{\tilde{v}}{x}\right) - 1 \\ &= -(\varphi_{t-1}(\tilde{v})^T, \mu_{\alpha'}(x)) \left(\frac{\tilde{v}}{x}\right) - 1 \text{ mit } \alpha' = -\varphi_{t-1}(\tilde{v})^T \tilde{v} - 1 \\ &= -\varphi_{t-1}(\tilde{v})^T \tilde{v} - \mu_{\alpha'}(x)x - 1 \\ &= \alpha' - \mu_{\alpha'}(x)x \neq 0 \end{aligned}$$

Da φ_t bijektiv ist und T wegen $a_c^T c = \varphi_t^T c = -\alpha - 1 \neq 0$ invertierbar, erfüllt φ_t die im Hilfslemma geforderten Bedingungen. \square

Nun haben wir also mit den Abbildungen $f_c = \Phi_c^{-1} \Gamma_{T_{a_c, c}}^{-1} \Psi_a$ ein geeignetes Matching auf

$$\bigcup_{a \in K^t} \mathcal{L}_t^{a, -}(n) \dot{\cup} \bigcup_{c \in K^t} \mathcal{L}_t^{c, +}(n)$$

gefunden. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass die exponierten Elemente, d. h.

$$\bigcup_{a \in K^t, b \in \mathcal{L}\binom{t}{1}, a^T \cdot b \neq 0} L_{t-1}^{a, b}(n) \dot{\cup} \Delta$$

in symmetrische Ketten zerlegbar sind, so folgt aus dem Matchingkriterium 3.4 der Satz.

Dies ist verhältnismäßig leicht zu zeigen:

Da $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ und Δ symmetrisch in $\mathcal{L}_t(n)$ liegen, sind symmetrische Ketten dieser beiden Klassen auch symmetrische Ketten in $\mathcal{L}_t(n)$. Nach Induktionsannahme sind $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n) \cong \mathcal{L}_{t-1}(n-1)$ und $\Delta \cong \mathcal{L}_{t+1}(n-1)$ symmetrische Kettenordnungen, also auch in $\mathcal{L}_t(n)$ in symmetrische Ketten zerlegbar. \square

Unser ursprüngliches Ziel, den linearen Verband $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}_0(n)$ in symmetrische Ketten zu zerlegen, haben wir hiermit erreicht. Im Folgenden schauen wir uns für den Spezialfall $t = 0$ noch einmal genauer an, wie der Algorithmus vorgeht, insbesondere die ersten beiden Iterationsschritte:

4.5 Der Spezialfall $t=0$

Die Elemente des linearen Verbandes $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}_0(n)$ bestehen in der Blockmatrix $\left(\begin{array}{c|c} E_t & \mathbf{0} \\ \hline A & B \end{array} \right)$ nur aus der Matrix B . Die Klasse $\mathcal{L}_{t-1}^{a,b}(n)$ ist die leere Menge und a und c sind leere Vektoren. Somit bleibt für die Unterteilung aus Abschnitt 4.3:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n) &= \underbrace{\left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}^T & \\ \hline & B' \end{array} \right) \in \mathcal{L}(n) \right\}}_{\mathcal{L}_0^{a,-}(n)} \\ &\dot{\cup} \underbrace{\left\{ \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \mathbf{0}^T \\ \hline & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}(n) \right\}}_{\mathcal{L}_0^{c,+}(n)} \\ &\dot{\cup} \underbrace{\left\{ \left(\begin{array}{c|c} e_1^T & \\ \hline x & B'' \end{array} \right) \in \mathcal{L}(n) \mid x \neq \mathbf{0} \right\}}_{\Delta} \end{aligned}$$

Dies ist genau die Dreiteilung aus Abschnitt 4.1.

Lemma 4.11 *Die Klasse $\mathcal{L}_0^{a,-}(n)$ besteht genau aus den linearen Unterräumen in $\mathcal{L}(n)$, die Unterräume der Hyperebene $\left\langle \left(\frac{\mathbf{0}^T}{E_{n-1}} \right) \right\rangle$ sind, d. h.*

$$\text{Ideal} \left(\left(\frac{\mathbf{0}^T}{E_{n-1}} \right) \right) = \mathcal{L}_0^{a,-}(n) = \left\{ \left(\frac{\mathbf{0}^T}{B'} \right) \in \mathcal{L}(n) \right\}$$

Beweis: „ \subseteq “ Sei $X \in \text{Ideal} \left(\left(\frac{\mathbf{0}^T}{E_{n-1}} \right) \right)$ und in $(n \times k)$ -Schubert-Normalform. Dann gibt es nach Lemma 4.2 eine Matrix C in $((n-1) \times k)$ -Schubert-Normalform, so dass $X = \left(\frac{\mathbf{0}^T}{E_{n-1}} \right) \cdot C$. Also ist die erste Zeile von X die Nullzeile.

„ \supseteq “ Die Matrix $\left(\frac{\mathbf{0}^T}{E_{n-1}} \right)$ entspricht der Hyperebene $\langle e_2, \dots, e_n \rangle$, hat also als Unterräume genau alle Räume, dessen Elemente die erste Komponente Null haben, d. h. alle Schubert-Matrizen der Form $\left(\frac{\mathbf{0}^T}{B'} \right)$. \square

Lemma 4.12 *Die Klasse $\mathcal{L}_0^{c,+}(n)$ besteht genau aus den linearen Unterräumen in $\mathcal{L}(n)$, die Oberräume der „x-Achse“ $\langle e_1 \rangle$ sind, d. h.*

$$\text{Filter}(e_1) = \mathcal{L}_0^{c,+}(n) = \left\{ \left(e_1 \middle| \frac{\mathbf{0}^T}{B''} \right) \in \mathcal{L}(n) \right\}$$

Beweis: „ \subseteq “ Sei $X \in \text{Filter}(e_1)$ und in $(n \times m)$ -Schubert-Normalform. Dann gibt es nach Lemma 4.2 einen Vektor C in $(m \times 1)$ -Schubert-Normalform, so dass $e_1 = X \cdot C$. C muss als Untervektor von e_1 der erste m -Einheitsvektor sein. Die erste Spalte von X ist $X \cdot e_1 = X \cdot C = e_1$.

Hätte X als erste Zeile die Nullzeile, so wäre der erste Eintrag von $e_1 = X \cdot C$ eine Null, was nicht der Fall ist.

„ \supseteq “ $\left\langle \left(e_1 \middle| \frac{\mathbf{0}^T}{B''} \right) \right\rangle \stackrel{\text{Lemma 4.3}}{=} \langle e_1 \rangle + \left\langle \left(\frac{\mathbf{0}^T}{B''} \right) \right\rangle \in \text{Filter}(e_1)$. \square

Jetzt haben wir eine anschauliche Vorstellung von den Mengen $\mathcal{L}_0^{a,-}(n)$ und $\mathcal{L}_0^{c,+}(n)$.

Das Matching $f = \Phi_c^{-1} \Gamma_{T_{a_c, c}}^{-1} \Psi_{a_c} =: f_c : \mathcal{L}_t^{a, -}(n) \rightarrow \mathcal{L}_t^{c, +}(n)$ wird für $t = 0$ zu dem in Abschnitt 4.1 definierten Matching:

$$\begin{aligned} f : \text{Ideal}\left(\left(\frac{\mathbf{0}^T}{E_{n-1}}\right)\right) &\rightarrow \text{Filter}(e_1) \\ U &\mapsto U \vee e_1 = U + \langle e_1 \rangle \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} f : \left\{ \left(\frac{\mathbf{0}^T}{B'} \right) \in \mathcal{L}(n) \right\} &\rightarrow \left\{ \left(e_1 \middle| \frac{\mathbf{0}^T}{B'} \right) \in \mathcal{L}(n) \right\} \\ \left(\frac{\mathbf{0}^T}{B'} \right) &\mapsto \left(e_1 \middle| \frac{\mathbf{0}^T}{B'} \right) \end{aligned}$$

Der zweite Iterationsschritt zerlegt Filter und Ideal analog zum ersten Schritt in jeweils drei Klassen.

Der Rest $\Delta_1 \cong \mathcal{L}_1(n-1)$ wird zerlegt in:

$$\Delta_1 = \bigcup_{c \in K} \mathcal{L}_1^{c, +}(n-1) \dot{\cup} \bigcup_{a \in K} \mathcal{L}_1^{a, -}(n-1) \dot{\cup} \bigcup_{a \in K \neq 0} \mathcal{L}_0^{a, 1}(n-1) \dot{\cup} \Delta_2$$

Dabei sind $\mathcal{L}_1^{c, +}(n-1)$ und $\mathcal{L}_1^{a, -}(n-1)$ jeweils isomorph zu dem „Rest“ Δ_1 nach dem ersten Iterationsschritt. Die Mengen $\mathcal{L}_0^{a, 1}(n-1)$ sind isomorph zu dem linearen Verband $\mathcal{L}(n-1)$ und der neue „Rest“ Δ_2 entspricht $\mathcal{L}_2(n-2)$.

Dazu eine Graphik, die zeigt, wie Δ_1 im zweiten Schritt zerlegt wird. Der Anschaulichkeit halber betrachten wir hier nur den Fall $q = 2$.

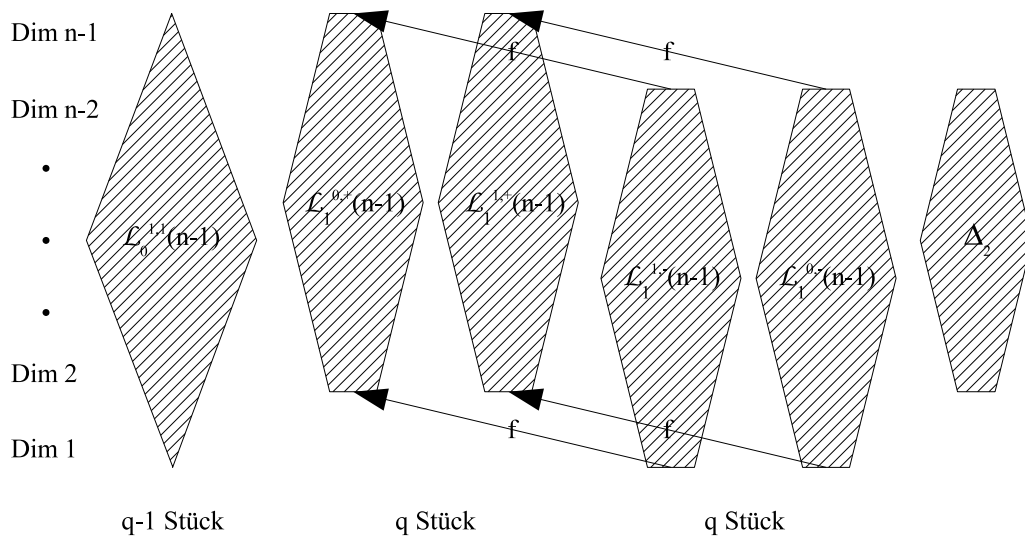


Abbildung 12: Zerlegung von Δ_1

Hier fällt auf, dass es mit dieser Vorgehensweise evtl. möglich ist, die Existenz einer anderen Zerlegung des linearen Verbandes nachzuweisen, der *Intervallzerlegung*. Mit dieser wollen wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen.

5 Intervallzerlegung

Es besteht die bisher nicht widerlegte noch bewiesene Vermutung, dass der lineare Verband auf bestimmte Weise disjunkt in Intervalle zerlegt werden kann. Diese Vermutung beruht vor allem auf folgenden kombinatorischen Zusammenhängen:

5.1 Kombinatorische Grundlagen

Sei K ein Körper mit $q < \infty$ Elementen. Wir betrachten den linearen Verband $\mathcal{L}(n, K)$ aller Unterräume des n -dimensionalen Vektorraumes K^n . Die Mächtigkeit des k -ten Niveaus, d. h. die Anzahl der k -dimensionalen Unterräume von V , notieren wir mit $\binom{n}{k}_q$. Die Zahlen $\binom{n}{k}_q$ heißen *Gauß'sche Koeffizienten*. Die Zahlen $G_{n,q} := |\mathcal{L}(n, K)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q$ heißen *Galoiszahlen*.

Eine interessante Frage ist die nach der Größe der Gauß'schen Koeffizienten. Diese wurde u. a. von Aigner [1], Seite 128, mit folgendem Lemma beantwortet:

Lemma 5.1 *Es gilt*

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)} = \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)}$$

Beweis: Wir bestimmen zunächst die Anzahl $U_{n,k}$ der geordneten k -Tupel von linear unabhängigen Vektoren aus $V_{n,q}$. Als erste Komponente eines solchen Tupels kommen alle $q^n - 1$ Vektoren $\neq \mathbf{0}$ in Frage. Ist $v \neq \mathbf{0}$ ein solcher Vektor, so spannt v einen 1-dimensionalen Unterraum der Mächtigkeit q auf, denn $\langle v \rangle = \{\alpha v | \alpha \in K\}$. Alle anderen $q^n - q$ Vektoren sind l. u. von v . Ist w ein solcher Vektor, d. h. die zweite Komponente des k -Tupels, so spannen v und w den 2-dimensionalen Unterraum $\langle v, w \rangle = \{\alpha v + \beta w | \alpha, \beta \in K\}$ der Mächtigkeit q^2 auf. Für die dritte Komponente können wir also alle $q^n - q^2$ Vektoren, die nicht in $\langle v, w \rangle$ liegen, wählen. Insgesamt erhalten wir

$$U_{n,k} = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1}) = \prod_{l=0}^{k-1} q^l (q^{n-l} - 1)$$

Jedes k -Tupel von linear unabhängigen Vektoren spannt einen k -dimensionalen Unterraum auf. Umgekehrt hat jeder k -dimensionale Unterraum $U_{k,k}$ geordnete Basen. Somit gilt

$$\binom{n}{k}_q = \frac{U_{n,k}}{U_{k,k}} = \frac{\prod_{l=0}^{k-1} q^l (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} q^l (q^{k-l} - 1)} = \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)}$$

□

Wie schon in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, sind die linearen Verbände in gewisser Weise Verallgemeinerungen der Booleschen Verbände. Dies begründen wir damit, dass gültige Identitäten in den Zahlen $\binom{n}{k}_q$ zu gültigen Identitäten in den Zahlen $\binom{n}{k}$ werden, wenn wir q gegen 1 streben lassen. Genauer gesagt gilt die Identität:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}$$

Dies wollen wir zeigen:

Wir definieren für $l = 0, \dots, k-1$:

$$\begin{aligned} f_l(q) &:= q^{n-l} - 1 \\ g_l(q) &:= q^{k-l} - 1 \end{aligned}$$

Dann sind die Gauß'schen Koeffizienten mit $f(q) := \prod_{l=0}^{k-1} f_l(q)$, $g(q) := \prod_{l=0}^{k-1} g_l(q)$ der Quotient aus f und g :

$$\binom{n}{k}_q = \frac{f(q)}{g(q)}$$

Nach der Produktregel ist die r -te Ableitung von f nach q :

$$f^{(r)}(q) = \sum_{\substack{r_0 + \dots + r_{k-1} = r \\ 0 \leq r_i \leq r}} f_0^{(r_0)}(q) \cdots f_{k-1}^{(r_{k-1})}(q)$$

Für alle $r_i \geq 1$ ist $\lim_{q \rightarrow 1} f_i^{(r_i)}(q) = 1$, einzig für $r_i = 0$ ist $\lim_{q \rightarrow 1} f_i^{(r_i)}(q) = \lim_{q \rightarrow 0} f_i(q) = 0$. Da für $0 \leq r \leq k-1$ in jeder Summe $r_0 + \dots + r_{k-1}$ mindestens ein $r_{k_i} = 0$ ist, enthält in diesem Fall jeder Summand von $f^{(r)}(q)$ mindestens einen Faktor 0, d. h.

$$\forall 0 \leq r \leq k-1 : \lim_{q \rightarrow 1} f^{(r)}(q) = 0$$

Die k -te Ableitung von f hingegen strebt nicht gegen 0, denn:

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow 1} f^{(k)}(q) &= \lim_{q \rightarrow 1} \sum_{\substack{r_0 + \dots + r_{k-1} = k \\ 0 \leq r_i \leq k}} f_0^{(r_0)}(q) \cdots f_{k-1}^{(r_{k-1})}(q) \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} (k! \cdot f_0'(q) \cdots f_{k-1}'(q)) \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} (k! \cdot n \cdot q^{n-1} \cdot (n-1) \cdot q^{n-2} \cdots (n-k+1) \cdot q^{n-k}) \\
 &= \frac{k! \cdot n!}{(n-k)!}
 \end{aligned}$$

Analog gilt für g :

$$\forall 0 \leq r \leq k-1 : \lim_{q \rightarrow 1} g^{(r)}(q) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow 1} g^{(k)}(q) &= \lim_{q \rightarrow 1} \sum_{\substack{r_0 + \dots + r_{k-1} = k \\ 0 \leq r_i \leq k}} g_0^{(r_0)}(q) \cdots g_{k-1}^{(r_{k-1})}(q) \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} (k! \cdot g_0'(q) \cdots g_{k-1}'(q)) \\
 &= \lim_{q \rightarrow 1} (k! \cdot k \cdot q^{k-1} \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} \cdots 2 \cdot q) \\
 &= k! \cdot k!
 \end{aligned}$$

Somit folgt nach k -facher Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \binom{n}{k}_q = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(q)}{g(q)} = \frac{\lim_{q \rightarrow 1} f(q)}{\lim_{q \rightarrow 1} g(q)} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Die Booleschen Verbände sind also gewissermaßen Vektorräume über einem einelementigen Körper. Dieser Zusammenhang wird schon durch die Analogie in der Schreibweise angedeutet.

Auch die mengentheoretische Interpretation der Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (n-l)}{\prod_{l=0}^{k-1} (k-l)}$$

hat ein Analogon in der Theorie der linearen Verbände.

Es gibt $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ Möglichkeiten, eine geordnete k -Teilmenge

aus einer n -Menge auszuwählen, also $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$ Möglichkeiten, eine nicht geordnete k -Teilmenge auszuwählen.

Genauso haben wir im Beweis von Lemma 5.1 die Formel

$$\binom{n}{k}_q = \frac{\prod_{l=0}^{k-1} q^l (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} q^l (q^{k-l} - 1)}$$

interpretiert.

Nun ist es naheliegend, dass es auch bei den Gauß'schen Koeffizienten eine Rekursionsformel gibt wie beim Booleschen Verband die Formel

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, k \geq 1$$

eine vollständige Übersicht über die Binomialkoeffizienten gibt.

In der Tat gilt der folgende

Satz 5.1 (Rekursion für die Gauß'schen Koeffizienten) *Es gilt für alle $n \geq 0$ und alle q :*

$$\binom{n}{0}_q = 1$$

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q, k \geq 1$$

Beweis: Der Nullraum ist der einzige Unterraum der Dimension 0, also

$$\binom{n}{0}_q = 1$$

Wenden wir die Berechnung aus Lemma 5.1 an, so erhalten wir für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}_q &= \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\
&= \frac{(q^n - 1) \prod_{l=0}^{k-2} (q^{n-l-1} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\
&= \frac{(q^k - 1) \prod_{l=0}^{k-2} (q^{n-l-1} - 1) + q^k (q^{n-k} - 1) \prod_{l=0}^{k-2} (q^{n-1-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\
&= \frac{(q^k - 1) \prod_{l=0}^{k-2} (q^{n-l-1} - 1) + q^k \prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-1-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\
&= \frac{\prod_{l=0}^{k-2} (q^{n-l-1} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-2} (q^{k-l-1} - 1)} + \frac{q^k \prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-1-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\
&= \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q
\end{aligned}$$

□

Bei den Binomialkoeffizienten können wir auch die Rekursionsformel mengentheoretisch interpretieren, wenn wir uns überlegen, wie man eine k -Teilmenge einer n -Menge N aufbaut. Wir sondern ein Element $a \in N$ aus. Die k -Teilmengen K von N zerfallen dann in zwei disjunkte Klassen, je nachdem ob K das Element a enthält oder nicht. In der ersten Klasse erscheinen alle möglichen $(k-1)$ -Teilmengen von $N \setminus \{a\}$ zusammen mit a , insgesamt also $\binom{n-1}{k-1}$ Mengen. Die zweite Klasse besteht aus allen k -Teilmengen von $N \setminus \{a\}$, also $\binom{n-1}{k}$ Mengen.

Anders ausgedrückt ist die erste Klasse die Menge aller k -Mengen in $\text{Filter}(a)$ und die zweite Klasse die Menge aller k -Mengen in $\text{Ideal}(a')$, wobei $a' = N \setminus \{a\}$ das eindeutige Komplement von a in \mathcal{B}_n ist.

Eine solche Interpretation für die Rekursionsformel der Gauß'schen Koeffizienten zu finden, stellt sich als schwierig heraus.

Der naheliegende Ansatz ist der folgende: Wir greifen einen eindimensionalen Unterraum U aus $\mathcal{L}(n, K)$ heraus. Die k -dimensionalen Unterräume W zerfallen dann in zwei disjunkte Klassen, je nachdem ob U ein Unterraum von W ist oder nicht. Die erste Klasse besteht aus allen k -dimensionalen Unterräumen in $\text{Filter}(U)$. Fassen wir $\text{Filter}(U)$ als linearen Verband $\mathcal{L}(n-1, K)$ vom

Rang $n-1$ auf, so entspricht die erste Klasse genau den $(k-1)$ -dimensionalen Unterräumen in $\mathcal{L}(n-1, K)$, hat also die Mächtigkeit $\binom{n-1}{k-1}_q$.

Das Ideal eines Komplementes von U umfasst $\binom{n-1}{k}_q$ k -dimensionale Unterräume, die auch alle in der zweiten Klasse liegen. Jedoch zerfällt die zweite Klasse sicher nicht in q^k disjunkte Ideale von Komplementen von U , wie es die Rekursionsformel vermuten lässt. Jedes Ideal eines Unterraumes enthält den Nullraum, somit können zwei Ideale nicht disjunkt sein.

Dieser Ansatz gibt also keine „vektorraum-theoretische“ Interpretation von Satz 5.1.

Eine mögliche Interpretation liefert die Rekursion der Galoiszahlen:

Satz 5.2 (Rekursion für die Galoiszahlen) *Es gilt für alle $n \geq 0$ und alle q :*

$$\begin{aligned} G_{0,q} &= 1, G_{1,q} = 2 \\ G_{n,q} &= 2 \cdot G_{n-1,q} + (q^{n-1} - 1)G_{n-2,q}, n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweis: Der lineare Verband $\mathcal{L}(0, K)$ besteht aus dem Nullraum und $\mathcal{L}(1, K)$ besteht aus dem Nullraum und K .

Wir betrachten alle $0 \leq k \leq n-2$.

1. Fall: $n \geq 3$

a) $k = 0$:

$$(q^{k+1} - 1) \binom{n-1}{k+1}_q = (q-1) \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} = (q^{n-1} - 1) \binom{n-2}{k}_q$$

b) $1 \leq k \leq n-2$:

$$\begin{aligned} (q^{k+1} - 1) \binom{n-1}{k+1}_q &= \frac{(q^{k+1} - 1) \prod_{l=0}^k (q^{n-1-l} - 1)}{\prod_{l=0}^k (q^{k+1-l} - 1)} \\ &= \frac{(q^{n-1} - 1) \prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-l-2} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\ &= (q^{n-1} - 1) \binom{n-2}{k}_q \end{aligned}$$

2. Fall: $n = 2$

Dann ist $k = 0$ und

$$(q^{k+1} - 1) \binom{n-1}{k+1}_q = (q-1) \binom{1}{1}_q = q-1 = q^{n-1} - 1 = (q^{n-1} - 1)G_{n-2,q}$$

Damit finden wir für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
G_{n,q} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q = \binom{n}{0}_q + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}_q + \binom{n}{n}_q \\
&\stackrel{\text{Satz 5.1}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q \right) + 1 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q + (q^k - 1) \binom{n-1}{k}_q \right) + 1 \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k}_q + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k}_q + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (q^k - 1) \binom{n-1}{k}_q \\
&= 2 \cdot G_{n-1,q} + \sum_{k=0}^{n-2} (q^{k+1} - 1) \binom{n-1}{k+1}_q \\
&= 2 \cdot G_{n-1,q} + \sum_{k=0}^{n-2} (q^{n-1} - 1) \binom{n-2}{k}_q \\
&= 2 \cdot G_{n-1,q} + (q^{n-1} - 1) G_{n-2,q}
\end{aligned}$$

und für $n = 2$:

$$G_{n,q} = 2 \cdot G_{n-1,q} + \sum_{k=0}^{n-2} (q^{k+1} - 1) \binom{n-1}{k+1}_q = 2 \cdot G_{n-1,q} + (q^{n-1} - 1) G_{n-2,q}$$

□

Diese Rekursionsformel deutet nun darauf hin, dass sich der lineare Verband $\mathcal{L}(n, K)$ disjunkt zerlegen lässt in zwei Intervalle $\cong \mathcal{L}(n-1, K)$ und $q^{n-1} - 1$ Intervalle $\cong \mathcal{L}(n-2, K)$.

Nach unseren Vorüberlegungen besteht also die

Vermutung: Es existieren im linearen Verband $\mathcal{L}(n, K)$ eindimensionale Unterräume $U, U_1, \dots, U_{q^{n-1}-1}$ und Hyperebenen $H, H_1, \dots, H_{q^{n-1}-1}$, so dass

$$\mathcal{L}(n, K) = \text{Filter}(U) \dot{\cup} \text{Ideal}H \dot{\cup} [U_1, H_1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [U_{q^{n-1}-1}, H_{q^{n-1}-1}]$$

Diese Zerlegung nennen wir eine *Intervallzerlegung* von $\mathcal{L}(n, K)$.

Die Aufgabe, die Existenz einer solchen Intervallzerlegung nachzuweisen oder zu widerlegen, wollen wir nun rein kombinatorisch angehen. D. h. wir vermeiden die sehr spezielle Matrixschreibweise und benutzen statt dessen allgemeinere Begriffe aus der Kombinatorik, die die Elemente des Verbandes nicht direkt ansprechen sondern nur bezüglich ihrer Dimension und ihrer Relation zu anderen Elementen beschreiben.

Definition 5.1 Sei (M, \leq) eine partiell geordnete Menge mit Nullelement $\mathbf{0}$ und Einselement $\mathbf{1}$. Dann heißen die oberen Nachbarn der Null Atome und die unteren Nachbarn der Eins Coatome.

Wir nennen also künftig die eindimensionalen Räume in $\mathcal{L}(n, K)$ Atome und die Hyperebenen Coatome. Mit dieser Notation lautet nun unsere Vermutung:

Es existieren im linearen Verband $\mathcal{L}(n, K)$ Atome $a, a_1, \dots, a_{q^{n-1}-1}$ und Coatome $C, C_1, \dots, C_{q^{n-1}-1}$, so dass

$$\mathcal{L}(n, K) = \text{Filter}(a) \dot{\cup} \text{Ideal}(C) \dot{\cup} [a_1, C_1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [a_{q^{n-1}-1}, C_{q^{n-1}-1}]$$

Bemerkung: Wählen wir ein beliebiges Atom a aus $\mathcal{L}(n, K)$ und ein dazu komplementäres Coatom C , so sind die Mengen $\text{Filter}(a)$ und $\text{Ideal}(C)$ disjunkt. Mit $X \in \text{Filter}(a) \cap \text{Ideal}(C)$ gilt nämlich $X \geq a$ und $X \leq C$ und damit $a \leq X \leq C$, was ein Widerspruch dazu ist, dass a und C komplementär sind.

Die folgenden Lemmata geben Aufschluss über die Struktur in $\mathcal{L}(n, K)$:

Lemma 5.2 Jeder k -dimensionale Unterraum in $\mathcal{L}(n, K)$ hat genau $\binom{k}{l}_q$ l -dimensionale Unterräume und $\binom{n-k}{m-k}_q$ k -dimensionale Oberräume in $\mathcal{L}(n, K)$.

Beweis: Sei U ein k -dimensionaler Unterraum. Die l -dimensionalen Unterräume von U in $\mathcal{L}(n, K)$ sind genau die l -dimensionalen Räume in $\text{Ideal}(U)$. Wegen $\text{Ideal}(U) \cong \mathcal{L}(k, K)$ gibt es davon genau $\binom{k}{l}_q$ Stück.

Die m -dimensionalen Oberräume von U in $\mathcal{L}(n, K)$ sind genau die m -dimensionalen Räume in $\text{Filter}(U)$. Wegen $\text{Filter}(U) \cong \mathcal{L}(n-k, K)$ entsprechen diese

den $(m-k)$ -dimensionalen Unterräumen in $\mathcal{L}(n-k, K)$, deren Anzahl $\binom{n-k}{m-k}_q$ ist. \square

Im Prinzip können wir also jeden k -dimensionalen Unterraum gleich behandeln.

Lemma 5.3 *Die Gauß'schen Koeffizienten bilden eine unimodale Folge, d. h.*

$$(i) \quad \binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q \text{ für } 0 \leq k \leq n$$

$$(ii) \quad \binom{n}{0}_q < \binom{n}{1}_q < \dots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}_q = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}_q > \dots > \binom{n}{n-1}_q > \binom{n}{n}_q$$

Beweis: Für $k \leq n-k+1$ gilt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q &= \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\ &= \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (q^{n-l} - 1) \prod_{l=n-k}^{k-1} (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{2k-n-1} (q^{k-l} - 1) \prod_{l=2k-n}^{k-1} (q^{k-l} - 1)} \\ &= \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (q^{n-l} - 1) \prod_{l=0}^{2k-n-1} (q^{k-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{2k-n-1} (q^{k-l} - 1) \prod_{l=0}^{n-k-1} (q^{n-k-l} - 1)} \\ &= \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^{n-k-1} (q^{n-k-l} - 1)} \\ &= \binom{n}{n-k}_q \end{aligned}$$

Somit gilt für $k \geq n-k+1$ mit $k' := n-k \leq k+1 = n-k'+1$:

$$\binom{n}{n-k}_q = \binom{n}{k'}_q = \binom{n}{n-k'}_q = \binom{n}{k}_q$$

Außerdem gilt:

$$\binom{n}{k}_q \cdot \frac{q^{n-k} - 1}{q^{k+1} - 1} = \frac{\prod_{l=0}^k (q^{n-l} - 1)}{\prod_{l=0}^k (q^{k-l} - 1)} = \binom{n}{k+1}_q$$

also:

$$\binom{n}{k}_q < \binom{n}{k+1}_q \Leftrightarrow \frac{q^{n-k} - 1}{q^{k+1} - 1} > 1 \Leftrightarrow n - 2k - 1 < 0 \Leftrightarrow k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

□

Die Abbildungen aus Kapitel 4 des linearen Verbandes in Form einer Raute sollten schon die Unimodalität der Gauß'schen Koeffizienten andeuten.

5.2 Zwei einfache Fälle

Wir betrachten zwei einfache Fälle, für die eine Intervallzerlegung existiert.

Der Fall $n = 2$:

Der lineare Verband $\mathcal{L}(2, K)$ besteht aus dem Nullraum $\mathbf{0}$, dem ganzen Raum $\mathbf{1} = K^2$ sowie $\binom{2}{1}_q = q + 1$ Atomen a_1, \dots, a_{q+1} , die wegen $n - 1 = 1$ gleichzeitig Coatome sind. Für $i \neq j \in \{1, \dots, q + 1\}$ ist also

$$\mathcal{L}(2, K) = \underbrace{\text{Filter}(a_i)}_{=\{a_i, \mathbf{1}\}} \dot{\cup} \underbrace{\text{Ideal}(a_j)}_{=\{\mathbf{0}, a_j\}} \dot{\cup} \bigcup_{k \neq i, j} \{a_k\}$$

eine Intervallzerlegung.

Der Fall $n = 3$:

Der lineare Verband $\mathcal{L}(3, K)$ besteht aus dem Nullraum $\mathbf{0}$, dem ganzen Raum $\mathbf{1} = K^3$, $\binom{3}{2}_q = \frac{q^3-1}{q-1}$ Coatomen sowie $\binom{3}{1}_q = \frac{q^3-1}{q-1}$ Atomen. Wählen wir ein beliebiges Atom a und ein dazu komplementäres Coatom C , so liegen in $\text{Filter}(a)$ $\binom{2}{1}_q = q + 1$ Coatome und in $\text{Ideal}(C)$ ebenso viele Atome. Nach Streichung von $\text{Filter}(a)$ und $\text{Ideal}(C)$ bleiben also noch

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} - (q + 1) - 1 = q^2 - 1$$

Atome a_1, \dots, a_{q^2-1} und $q^2 - 1$ Coatome C_1, \dots, C_{q^2-1} übrig. Da $\mathcal{L}(3, K)$ modular ist, gilt:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q^2 - 1 : r(C_i \wedge C) &= r(C_i) + r(C) - r(C_i \vee C) \\ &= (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 = 1 \end{aligned}$$

d. h. $C_i \wedge C$ ist ein Atom. Es gibt also für jedes $i \in \{1, \dots, q^2 - 1\}$ genau ein Atom $\tilde{a} \in \text{Ideal}(C)$, so dass $\tilde{a} \leq C_i$. Da insgesamt $q + 1$ Atome $\leq C_i$ sind, existieren genau q Atome im a_{i_1}, \dots, a_{i_q} , so dass

$$\forall j \in 1, \dots, q : a_{i_j} \leq C_i$$

oder äquivalent:

$$a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_q} \leq C_i$$

Umgekehrt gibt es zu jedem a_j genau q Coatome C_{j_1}, \dots, C_{j_q} , so dass

$$\forall k \in 1, \dots, q : a_j \leq C_{j_k}$$

bzw.

$$a_j \leq C_{j_1} \wedge \dots \wedge C_{j_q}$$

Durch $\mathcal{L}(3, K)$ ist eine Familie $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_{q^2-1}\}$ von q -Mengen aus $\{1, \dots, q^2 - 1\}$ gegeben, so dass jedes Element aus $\{1, \dots, q^2 - 1\}$ insgesamt genau q -mal vorkommt.

Unsere Aufgabe, eine Intervallzerlegung zu finden, ist gelöst, wenn wir ein SDR von \mathcal{S} gemäß Definition 3.5 gefunden haben.

Das Problem kann als das **Matching-Intervallzerlegungs-Problem** auf einem bipartiten Graphen $G = (V \cup W, E)$ modelliert werden, wobei:

$$\begin{aligned} V &:= \{1, \dots, q^2 - 1\} \\ W &:= \mathcal{S} \\ (s, S_i) \in E &:\Leftrightarrow s \in S_i \end{aligned}$$

Ein SDR entspricht damit einem Matching M in G der Mächtigkeit $|M| = |\mathcal{S}| = q^2 - 1$.

Dieses Problem wollen wir einmal für $q = 3$ lösen. Wir finden beispielsweise folgende Konstellation:

$$\begin{aligned} a_3 \vee a_5 \vee a_7 &\leq C_1 \\ a_2 \vee a_3 \vee a_6 &\leq C_2 \\ a_1 \vee a_3 \vee a_8 &\leq C_3 \\ a_4 \vee a_6 \vee a_8 &\leq C_4 \\ a_1 \vee a_4 \vee a_7 &\leq C_5 \\ a_2 \vee a_4 \vee a_5 &\leq C_6 \\ a_1 \vee a_5 \vee a_6 &\leq C_7 \\ a_2 \vee a_7 \vee a_8 &\leq C_8 \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\mathcal{S} = \{\{\underline{3}, 5, 7\}, \{\underline{2}, 3, 6\}, \{\underline{1}, 3, 8\}, \{\underline{4}, 6, 8\}, \{1, 4, \underline{7}\}, \{2, 4, \underline{5}\}, \{1, 5, \underline{6}\}, \{2, 7, \underline{8}\}\}$$

wobei die unterstrichenen Elemente das Matching

$$M = \{(3, S_1), (2, S_2), (1, S_3), (4, S_4), (7, S_5), (5, S_6), (6, S_7), (8, S_8)\}$$

der Mächtigkeit $q^2 - 1 = 8$ aufzeigen.

Dieses Matching liefert uns die disjunkten Intervalle

$$[a_3, C_1], [a_2, C_2], [a_1, C_3], [a_4, C_4], [a_7, C_5], [a_5, C_6], [a_6, C_7], [a_8, C_8]$$

Phillip Hall bewies 1935 den bedeutenden *Heiratssatz* über die Existenz eines solchen Matchings:

Satz 5.3 (Heiratssatz) *Sei $G = (V \cup W, E)$ ein bipartiter Graph. Genau dann existiert ein Matching M in G der Mächtigkeit $|M| = |W|$, wenn die Hall-Bedingung*

$$\forall A \subseteq W : |A| \leq |A^*|$$

erfüllt ist, wobei $A^ := \{v \in V \mid (v, w) \in E \text{ für ein } w \in A\}$ die Nachfolgermenge von A ist.*

Das folgende Lemma gibt eine Lösung des *Matching-Intervallzerlegungs-Problems*:

Lemma 5.4 *Sei $G = (V \cup W, E)$ wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} V &:= \{1, \dots, k\} \\ W &:= \mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\} \subseteq \text{Pot}(V) \\ (s, S_i) \in E &: \Leftrightarrow s \in S_i \end{aligned}$$

Gilt

- S_1, \dots, S_m besitzen jeweils r Elemente
- $|\bigcup_{i=1}^m S_i| = |V| = k$
- alle Elemente der S_i sind in derselben Anzahl d von Mengen enthalten

so erfüllt G die Hall-Bedingung.

Beweis: Die m S_i besitzen r Elemente, d. h.: $|S_1| + \dots + |S_m| = m \cdot r$. Jedes der k Elemente liegt in genau d Mengen, somit liefert doppeltes Abzählen: $m \cdot r = k \cdot d$. Wegen $m \leq k$ muss also $d \leq r$ sein.

Sei $A \subseteq \mathcal{S}$ beliebig. Die Nachfolgermenge von A ist

$$A^* = \{v \in \{1, \dots, k\} | v \in S_i \text{ für ein } S_i \in A\} = \bigcup_{S_i \in A} S_i$$

Es gilt:

$$r \cdot |A| = \sum_{S_i \in A} |S_i| \leq \left| \bigcup_{S_i \in A} S_i \right| \cdot d$$

Wegen $d \leq r$ ist die Hall-Bedingung erfüllt. \square

Speziell in unserem *Matching-Intervallzerlegungs-Problem* gilt $r = d = q$ und $m = n = q^2 - 1$ und die Voraussetzungen des Lemmas sind erfüllt, womit bewiesen ist, dass $\mathcal{L}(3, K)$ eine Intervallzerlegung besitzt.

Die Fälle $n > 3$ sind wesentlich schwieriger zu lösen, weil dabei Intervalle vom Rang $n - 2$ „echte“ Intervalle sind im Gegensatz zu den behandelten Fällen, wo die Intervalle entweder leer, einelementig oder zweielementig Ketten sind. Für $n \leq 3$ bestehen die Intervalle nur aus den Atomen und Coatomen, so dass man allein mit Kenntnis dieser schon Disjunktheit konstruieren kann. Wir wollen nun das Problem angehen, für höhere Dimensionen disjunkte Intervalle zu finden.

5.3 Höhere Dimensionen

Unser Ziel ist es zu untersuchen, ob für $n \geq 4$ eine Intervallzerlegung von $\mathcal{L}(n, K)$ existiert. Dabei wollen wir den in Kapitel 4 beschriebenen Algorithmus von Vogt und Voigt benutzen, insbesondere die ersten beiden Iterationsschritte. Abbildung 12 zeigt, dass die ersten beiden Schritte schon eine teilweise Intervallzerlegung konstruieren, denn mit den Mengen $\mathcal{L}_0^{a,1}(n-1) \cong \mathcal{L}(n-2)$ wurden bereits $q-1$ disjunkte Intervalle gefunden.

Schließlich werden wir zeigen, dass dieser Ansatz für Dimension 4 eine Intervallzerlegung liefert, ab Dimension 5 jedoch führt der Algorithmus von Vogt und Voigt wider Erwarten zu keiner Intervallzerlegung.

Zunächst übersetzen wir die ersten beiden Iterationsschritte von der Matrixschreibweise in kombinatorische Sprache und verallgemeinern das Vorgehen,

so dass wir beispielsweise nicht speziell das Element $\langle e_1 \rangle$ ansprechen sondern allgemein ein beliebiges Atom.

1. Schritt: Wähle ein Atom $a \in \mathcal{L}(n, K)$ und ein dazu komplementäres Coatom C und zerlege $\mathcal{L}(n, K)$ in

$$\mathcal{L}(n, K) = \text{Filter}(a) \dot{\cup} \text{Ideal}(C) \dot{\cup} \text{“Rest}_1\text{“}$$

2. Schritt: In der Matrixschreibweise fällt auf, dass die minimalen Elemente

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ von den Intervallen } \mathcal{L}_0^{a,1}(n-1) \text{ sich in der Ebene } \left\langle \begin{pmatrix} E_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\rangle$$

schneiden, die wiederum in $\text{Ideal}(H)$ genau einen eindimensionalen Unterraum $\langle e_2 \rangle$ hat.

Kombinatorisch können wir dies ausdrücken als: Wähle eine Ebene E aus $\text{Filter}(a)$ und nehme alle Atome y , so dass $a \vee y = E$. Davon gibt es genau q Stück, denn jede Ebene enthält $\binom{2}{1}_q = q + 1$ Atome, also außer a weitere q Atome.

Behauptung: Genau ein solches Atom liegt in $\text{Ideal}(C)$.

Zur Existenz:

$$\begin{aligned} E \not\leq C &\Rightarrow E \vee C > C \Rightarrow E \vee C = \mathbf{1} \\ &\Rightarrow r(E \wedge C) = r(E) + r(C) - r(E \vee C) = 2 + (n-1) - n = 1 \\ &\Rightarrow a \vee x = E \text{ für } x := E \wedge C \in \text{Ideal}(C) \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} &\text{Angenommen, } \exists x \neq y \in \text{Ideal}(C) : a \vee x = E = a \vee y \\ \Rightarrow &x \vee y \leq E \text{ und } r(x \vee y) = r(x) + r(y) - r(x \wedge y) = 1 + 1 - 0 = 2 \\ \Rightarrow &x \vee y = E \notin \text{Ideal}(C) \\ \Rightarrow &\text{Widerspruch, da } x \vee y \in \text{Ideal}(C) \end{aligned}$$

\Rightarrow Behauptung

Wir bezeichnen dieses Atom mit x und die $q-1$ Atome in Rest_1 mit a_1, \dots, a_{q-1} .

Nun suchen wir ein Komplement von E , das in $\text{Ideal}(C)$ liegt.

Sei x' das Komplement von x in $\text{Ideal}(C)$, d. h.

$$x \wedge x' = \mathbf{0} \text{ und } x \vee x' = C \text{ und } r(x') = n - 2$$

Dann gilt:

$$E \not\leq x' \text{ wegen } E \not\leq C, \text{ also } E \wedge x' < E \quad (*)$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \leq E \wedge x' &\Rightarrow \tilde{a} \leq E \text{ und } \tilde{a} \leq x' \leq C \\ &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \tilde{a} = x \text{ oder } \tilde{a} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \tilde{a} = \mathbf{0}, \text{ da } x \not\leq E \wedge x' \end{aligned}$$

Somit gilt $E \wedge x' = \mathbf{0}$ und $E \vee x' = \mathbf{1}$.

Wir haben also mit x' ein Komplement von E , das in $\text{Ideal}(C)$ liegt, gefunden.

Mit diesem Element gehen wir im Dualen genauso vor wie mit E :

Nehme alle Coatome Y , so dass $C \wedge Y = x'$. Davon gibt es genau eins in $\text{Filter}(a)$, das wir mit X bezeichnen. Genau $q-1$ Coatome $C_1, \dots, C_{q-1} \in \text{Rest}_1$ erfüllen $C \wedge Y = x'$.

Dies ergibt folgende Graphik:

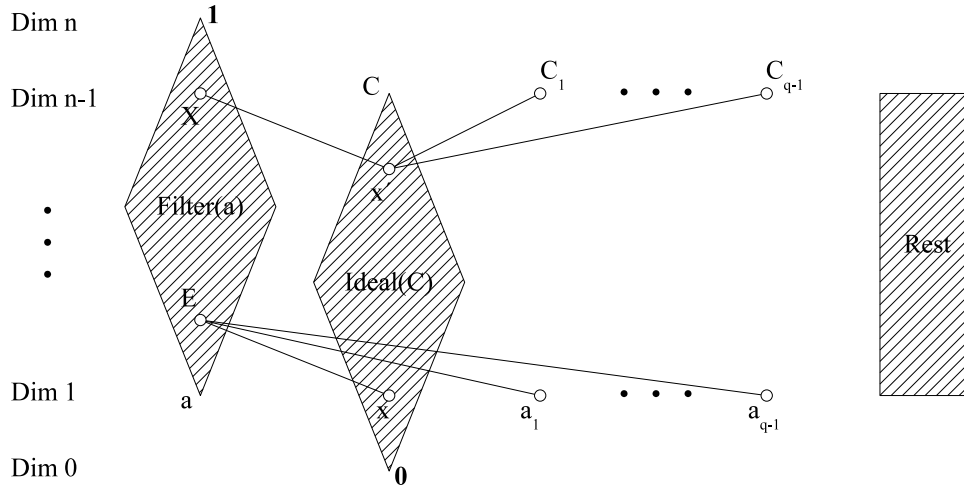


Abbildung 13: Relationen zwischen den Atomen a_i , den Coatomen C_i , $\text{Filter}(a)$ und $\text{Ideal}(C)$

Dabei ist anzumerken, dass hier nur die wichtigen Relationen markiert sind. Es bestehen weitere Verbindungen zwischen $\text{Filter}(a)$, $\text{Ideal}(C)$ und dem Rest.

Zur Auffindung der $q - 1$ disjunkten Intervalle hilft uns das

Lemma 5.5 *Zu jedem $i \in \{1, \dots, q-1\}$ existiert genau ein $k \in \{1, \dots, q-1\}$, so dass $a_i \leq C_k$, und zu jedem $k \in \{1, \dots, q-1\}$ existiert genau ein $i \in \{1, \dots, q-1\}$, so dass $C_k \geq a_i$.*

Beweis: Zur Eindeutigkeit:

Wir nehmen \neg an, dass es zwei Zahlen $i \neq j$ gibt, so dass

$$a_1 \leq C_i \text{ und } a_1 \leq C_j$$

Es gilt das Modularitätsgesetz:

$$\begin{aligned} a_1 \leq C_i &\Rightarrow a_1 \vee \underbrace{(C_i \wedge C_j)}_{=x'} = \underbrace{(a_1 \vee C_j)}_{=C_j} \wedge C_i \\ &\Rightarrow a_1 \vee x' = C_j \wedge C_i = x' \\ &\Rightarrow a_1 \leq a_1 \vee x' = x' \leq C \\ &\Rightarrow a_1 \in \text{Ideal}(C) \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Zur Existenz:

Sei $i \in \{1, \dots, q-1\}$ beliebig. Wegen $a_i \not\leq x'$ gilt $r(x' \vee a_i) = r(x') + r(a_i) - 0 = n - 1$. Ferner gilt: $x' \vee a_i \geq x'$ und $x' \vee a_i \geq a_i$. Also ist $x' \vee a_i$ ein oberer Nachbar von x' . Da die Coatome C, C_1, \dots, C_{q-1} und X die einzigen oberen Nachbarn von x' sind, gilt $x' \vee a_i \in \{C, C_1, \dots, C_{q-1}, X\}$.

1. Fall: $x' \vee a_i = C \Rightarrow C \geq a_i \Rightarrow \text{Widerspruch}$

2. Fall: $x' \vee a_i = X$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbf{1} = E \vee x' = (a \vee a_i) \vee (C \wedge X) \\ &\quad \text{distributive Ungleichung} \\ &\quad \leq \underbrace{(a \vee a_i \vee C)}_{=1} \wedge \underbrace{(a \vee a_i \vee X)}_{=a_i \vee X = X} = X \\ &\Rightarrow \mathbf{1} \leq X \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Somit existiert eine Zahl $k \in \{1, \dots, q-1\}$, so dass $a_i \leq x' \vee a_i \leq C_k$.

Die zweite Aussage ist dual zur ersten und analog zu beweisen. \square

Wir nehmen \mathbb{E} an, dass

$$\forall i \in \{1, \dots, q-1\} : a_i \leq C_i$$

Es gibt also $q-1$ Intervalle $[a_i, C_i]$.

Lemma 5.6 *Die Intervalle $[a_i, C_i]$ sind disjunkt.*

Beweis: Angenommen,

$$\exists \tilde{X} \in [a_i, C_i] \cap [a_j, C_j], i \neq j$$

bzw.:

$$\exists \tilde{X} : a_i \leq \tilde{X} \leq C_i \text{ und } a_j \leq \tilde{X} \leq C_j$$

Nach dem Modularitätsgesetz gilt:

$$\begin{aligned} a_i \leq \tilde{X} \leq C_i &\Rightarrow a_i \vee \underbrace{(a_j \wedge \tilde{X})}_{=a_j} = \underbrace{(a_i \vee a_j)}_{=E} \wedge \tilde{X} \\ \text{und } \tilde{X} \vee \underbrace{(a_j \wedge C_i)}_{=a_j} &= \underbrace{(\tilde{X} \vee a_j)}_{=\tilde{X}} \wedge C_i \\ &\Rightarrow E = E \wedge \tilde{X} \text{ und } \tilde{X} = \tilde{X} \wedge C_i \\ &\Rightarrow E \leq \tilde{X} \text{ und } \tilde{X} \leq C_i \\ &\Rightarrow E \leq \tilde{X} \leq C_i \text{ und } E \leq \tilde{X} \leq C_j \\ &\Rightarrow E \vee C_i = C_i \text{ und } E \vee C_j = C_j \\ &\Rightarrow \underbrace{x' \vee E}_{=1} \vee C_i = \underbrace{x' \vee C_i}_{=C_i} \text{ und } \underbrace{x' \vee E}_{=1} \vee C_j = \underbrace{x' \vee C_j}_{=C_j} \\ &\Rightarrow C_i = 1 = C_j \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

□

Jetzt haben wir also $q-1$ disjunkte Intervalle konstruiert, die dieselbe Struktur wie die Mengen $\mathcal{L}_0^{a,1}(n-1)$ haben.

Nun wollen wir solche Übersetzungen auch für $\mathcal{L}_1^{c,+}(n-1)$ und $\mathcal{L}_1^{a,-}(n-1)$ finden.

Dabei hilft uns die Beobachtung, dass jeweils zwei verschiedene Elemente aus

$$\left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\rangle, \langle e_2 \rangle \right\} \text{ keine der Hyperebenen aus}$$

$$\bigcup_{c \in K} \mathcal{L}_1^{c,+}(n-1) \dot{\cup} \bigcup_{a \in K} \mathcal{L}_1^{a,-}(n-1)$$

als Oberräume gemeinsam haben.

In

$$\Delta := \mathcal{L}(n) \setminus \left(\text{Filter}(a) \dot{\cup} \text{Ideal}(C) \dot{\cup} \bigcup_{i=1}^{q-1} [a_i, C_i] \right)$$

gibt es $\binom{n}{n-1}_q - \binom{n-1}{n-2}_q - 1 - (q-1) = q^{n-1} - q$ Coatome. Diese unterteilen wir in q Klassen $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{q-1}$:

$$\mathcal{M} := \{\text{Coatome } \tilde{C} \in \Delta \mid x \leq \tilde{C}\}$$

$$\mathcal{M}_i := \{\text{Coatome } \tilde{C} \in \Delta \mid a_i \leq \tilde{C}\}$$

Behauptung:

$$\forall i \in \{1, \dots, q-1\} : |\mathcal{M}_i| = q^{n-2} - 1$$

Dazu: Sei $i \in \{1, \dots, q-1\}$. Es gibt insgesamt $\binom{n-1}{n-2}_q$ Coatome $\geq a_i$. Genau ein solches Coatom liegt in $\bigcup_{i=1}^{q-1} [a_i, C_i]$, nämlich C_i . Keins liegt in $\text{Ideal}(C)$. Wegen $r(a_i \vee a) = 2$ liegen $\binom{n-2}{n-3}_q$ solcher Coatome in $\text{Filter}(a)$. Mit

$$\binom{n-1}{n-2}_q - 1 - \binom{n-2}{n-3}_q = q^{n-2} \binom{n-2}{n-2}_q - 1 = q^{n-2} - 1$$

folgt die Behauptung.

Analog ist zu zeigen, dass

$$|\mathcal{M}| = q^{n-2} - 1$$

Um die Coatome zu benennen, nummerieren wir sie durch:

$$\mathcal{M}_i =: \{C_{i1}, \dots, C_{i,q^{n-2}-1}\}$$

und

$$\mathcal{M} =: \{C_{q1}, \dots, C_{q,q^{n-2}-1}\}$$

Die Mengen \mathcal{M}_i und \mathcal{M} sind disjunkt, denn:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{C} \in \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M} \text{ oder } \tilde{C} \in \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j, i \neq j \\
 \Rightarrow & \left(a_i \leq \tilde{C} \text{ und } x \leq \tilde{C} \right) \text{ oder } \left(a_i \leq \tilde{C} \text{ und } a_j \leq \tilde{C} \right) \\
 \Leftrightarrow & a_i \vee x \leq \tilde{C} \text{ oder } a_i \vee a_j \leq \tilde{C} \\
 \Rightarrow & a \leq E = a_i \vee x \leq \tilde{C} \text{ oder } a \leq E = a_i \vee a_j \leq \tilde{C} \\
 \Rightarrow & \tilde{C} \in \text{Filter}(a) \\
 \Rightarrow & \text{Widerspruch}
 \end{aligned}$$

Somit haben wir alle Coatome aus Δ in q disjunkte Klassen mit jeweils $q^{n-2} - 1$ Coatomen eingeteilt.

Mit den Atomen gehen wir genauso vor und erhalten:

$$\mathcal{N}_i := \{\text{Atome } \tilde{a} \in \Delta \mid \tilde{a} \leq C_i\} =: \{a_{i1}, \dots, a_{i,q^{n-2}-1}\}, i \in \{1, \dots, q-1\}$$

und

$$\mathcal{N} := \{\text{Atome } \tilde{a} \in \Delta \mid \tilde{a} \leq x'\} =: \{a_{q1}, \dots, a_{q,q^{n-2}-1}\}$$

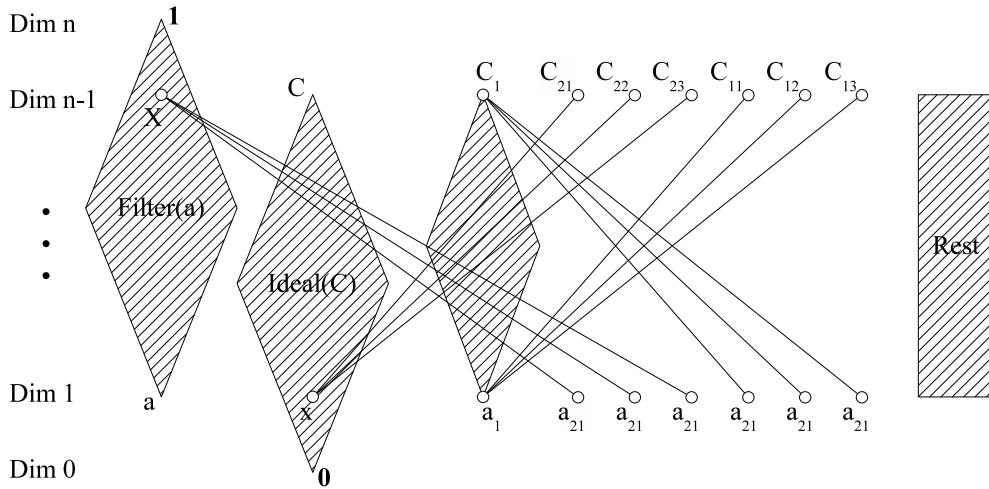


Abbildung 14: Relationen zwischen den Mengen $\mathcal{M}, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}, \mathcal{N}_i, [a_i, C_i], \text{Filter}(a)$ und $\text{Ideal}(C)$

Abbildung 14 stellt die Situation bis hierher dar. Wie auch im Folgenden beschränken wir uns hier auf den Fall $q = 2$.

In Tabellen 1 und 2 sind wichtige Strukturen und Relationen zusammengefasst, die wir im weiteren Verlauf benutzen werden.

Atome \leq	
C_1	a_1 $2^{n-2} - 1$ Atome aus $\text{Ideal}(C)$ alle Atome $a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}$
X	a $2^{n-3} - 1$ Atome aus $\text{Ideal}(C)$ 2^{n-4} Atome aus $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-4} Atome aus $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$
C_{1k}	a_1 $2^{n-2} - 1$ Atome aus $\text{Ideal}(C)$ $2^{n-3} - 1$ Atome aus $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-3} Atome aus $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$
C_{2k}	$2^{n-2} - 1$ Atome aus $\text{Ideal}(C)$ 2^{n-3} Atome aus $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-3} Atome aus $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$
$C_{1k} \wedge C_{2i}, i \neq k$	$2^{n-3} - 1$ Atome aus $\text{Ideal}(C)$ 2^{n-4} Atome aus $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-4} Atome aus $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$

Tabelle 1: Coatome und ihre Atome

Beweis: Zu C_1 : Wegen $r(C_1) = n - 1$ gibt es genau $\binom{n-1}{1}_2 = 2^{n-1} - 1$ Atome a' , so dass $a' \leq C_1$. Darunter sind nach Konstruktion alle $a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}$ sowie a_1 . Außerdem gilt

$$r(C_1 \wedge C) = r(C_1) + r(C) - r(C_1 \vee C) = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$$

und damit gibt es $\binom{n-2}{1}_2 = 2^{n-2} - 1$ Atome $\leq C_1 \wedge C$. Wir haben also insgesamt

$$(2^{n-2} - 1) + 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 1$$

Atome $\leq C_1$ gefunden und dies sind alle.

Zu X : Da auch X ein Coatom ist, gibt es genau $2^{n-1} - 1$ Atome a' , so dass $a' \leq X$. Darunter sind nach Konstruktion alle $a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}$ sowie a . Ferner liegen wegen $r(X \wedge C) = n - 2$ genau $2^{n-2} - 1$ weitere solche Atome in $\text{Ideal}(C)$. Letztere sind dieselben wie oben wegen $X \wedge C = C_1 \wedge C$.

Coatome \geq	
a_1	C_1 $2^{n-2} - 1$ Coatome aus $\text{Filter}(a)$ alle Coatome $C_{11}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}$
x	C $2^{n-3} - 1$ Coatome aus $\text{Filter}(a)$ 2^{n-4} Coatome aus $\{C_{11}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-4} Coatome aus $\{C_{21}, \dots, C_{2,2^{n-2}-1}\}$
a_{1k}	C_1 $2^{n-2} - 1$ Coatome aus $\text{Filter}(a)$ $2^{n-3} - 1$ Coatome aus $\{C_{11}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-3} Coatome aus $\{C_{21}, \dots, C_{2,2^{n-2}-1}\}$
a_{2k}	$2^{n-2} - 1$ Coatome aus $\text{Filter}(a)$ 2^{n-3} Coatome aus $\{C_{11}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-3} Coatome aus $\{C_{21}, \dots, C_{2,2^{n-2}-1}\}$
$a_{2k} \vee a_{2i}, i \neq k$	$2^{n-3} - 1$ Coatome aus $\text{Filter}(a)$ 2^{n-4} Coatome aus $\{C_{11}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}\}$ 2^{n-4} Coatome aus $\{C_{21}, \dots, C_{2,2^{n-2}-1}\}$

Tabelle 2: Atome und ihre Coatome

Zu C_{1k} : Insgesamt gibt es $2^{n-1} - 1$ Atome a' mit $a' \leq C_{1k}$. Ein solches Atom ist nach Konstruktion a_1 und $2^{n-2} - 1$ weitere liegen wegen $r(C \wedge C_{1k}) = n - 2$ in $\text{Ideal}(C)$.

Die Frage nach der Anzahl solcher Atome in $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$ beantworten wir, indem wir die Anzahl der Atome $\leq C_{1k} \wedge X$, die nicht in $\text{Ideal}(C) \cup [a_1, C_1] \cup \text{Filter}(a)$ liegen, bestimmen.

Zunächst stellen wir fest, dass gilt

$$a_1 \not\leq X \Rightarrow a_1 \not\leq C_{1k} \wedge X$$

und

$$a \not\leq C_{1k} \Rightarrow a \not\leq C_{1k} \wedge X$$

Gesucht ist also die Anzahl der Atome $\leq C_{1k} \wedge X$, die nicht in $\text{Ideal}(C)$ liegen.

Wegen $r(C_{1k} \wedge X) = n - 2$ gibt es insgesamt $2^{n-2} - 1$ Atome $\leq C_{1k} \wedge X$. Es gilt: $C_{1k} \wedge C \not\leq X$, denn

$$\begin{aligned} C_{1k} \wedge C \leq X & \Rightarrow C_{1k} \wedge \underbrace{C \wedge X}_{=x'} = C_{1k} \wedge C \\ & \Rightarrow x' \geq C_{1k} \wedge x' = C_{1k} \wedge C \\ & \xRightarrow{r(x')=r(C_{1k} \wedge C)} x' = C_{1k} \wedge C \\ & \Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Somit haben wir:

$$r(C_{1k} \wedge C \wedge X) = r(C_{1k} \wedge C) + r(X) - r((C_{1k} \wedge C) \vee X) = (n-2) + (n-1) - n = n-3$$

Es gibt also $2^{n-3} - 1$ Atome $\leq C_{1k} \wedge X$, die zusätzlich in $\text{Ideal}(C)$ liegen. Dies ist gleichzeitig die Anzahl der Atome $a_{1j} \leq C_{1k}$ und es bleiben

$$2^{n-2} - 1 - (2^{n-3} - 1) = 2^{n-3}$$

Atome $\leq X \wedge C_{1k}$, die nicht in $\text{Ideal}(C)$ liegen.

Zu C_{2k} : Da $a_1 \not\leq C_{2k}$, können wir ansonsten analog zu oben zeigen: Es gibt 2^{n-3} Atome a_{2j} aus $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$ und

$$2^{n-1} - 1 - \underbrace{(2^{n-2} - 1)}_{\text{im Ideal}(C)} - \underbrace{2^{n-3}}_{\text{in } \{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}} = 2^{n-3}$$

Atome a_{1i} aus $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$, so dass $a_{2j} \leq C_{2k}$ und $a_{1i} \leq C_{2k}$.
 Zu $C_{2i} \wedge C_{2k}$: Es gibt $\binom{2}{1}_2 = 3$ Coatome C' , so dass $C_{2i} \wedge C_{2k} \leq C'$, nämlich C_{2i}, C_{2k} und $\underbrace{a \vee (C_{2i} \wedge C_{2k})}_{\text{Coatom, da } a \not\leq C_{2i} \wedge C_{2k}} \in \text{Filter}(a)$. Somit gilt:

$$r(C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C) = (n-2) + (n-1) - n = n-3$$

Es gibt also $2^{n-3} - 1$ Atome $a' \in \text{Ideal}(C)$ mit $a' \leq C_{2i} \wedge C_{2k}$.
 Wegen $x \leq C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C$ und $x \not\leq C_1$ gilt $C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C \not\leq C_1$ und damit

$$\begin{aligned} r(C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C \wedge C_1) &= r(C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C) + n-1 - r((C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C) \vee C_1) \\ &= (n-3) + (n-1) - n = n-4 \end{aligned}$$

Außerdem hat $C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C_1$ wegen $C_{2i} \wedge C_{2k} \not\leq C_1$ Rang $n-3$. Somit gibt es $2^{n-3} - 1$ Atome $\leq C_{2i} \wedge C_{2k} \wedge C_1$, wovon $2^{n-4} - 1$ in $\text{Ideal}(C)$ liegen.
 Die übrigen $(2^{n-3} - 1) - (2^{n-4} - 1) = 2^{n-4}$ derartigen Atome sind Elemente aus $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$. \square

Dual dazu folgt Tabelle 2.

Mit diesen Vorbereitungen finden wir die den Mengen $\mathcal{L}_1^{c,+}(n-1)$ und $\mathcal{L}_1^{a,-}(n-1)$ entsprechenden Analogons.

Lemma 5.7

$$\mathcal{X}_0 := \{\tilde{X} \mid \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \vee a_1 \leq \tilde{X} \leq C_{1k}\} \cong \mathcal{L}_1^{0,+}(n-1)$$

Beweis: Die Menge $\mathcal{L}_1^{0,+}(n-1)$ ist isomorph zu

$$\mathcal{L}_1(n-2) = \mathcal{L}(n-1) \setminus (\text{Filter}(\tilde{a}) \cup \text{Ideal}(\tilde{C}))$$

wobei \tilde{a} ein Atom aus $\mathcal{L}(n-1)$ und \tilde{C} ein dazu komplementäres Coatom ist. Anders ausgedrückt ist dies

$$\mathcal{L}_1(n-2) = \mathcal{L}(n-1) \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$$

mit $\mathcal{S} \cong \mathcal{L}(n-1) \cong \mathcal{T}$ und $\dim(U) \geq 1$ für $U \in \mathcal{S}$ und $\dim(V) \leq n-1$ für $V \in \mathcal{T}$.

Wir zeigen, dass gilt

$$\mathcal{X}_0 \dot{\cup} \text{Filter}(a \vee a_1) \dot{\cup} [a_1, C_1] = \text{Filter}(a_1) \cong \mathcal{L}(n-1)$$

Zur Disjunktheit: \mathcal{X}_0 und $\text{Filter}(a \vee a_1)$ sind disjunkt, denn:

$$\begin{aligned}
& \tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \cap \text{Filter}(a \vee a_1) \\
& \Leftrightarrow \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \vee a_1 \leq \tilde{X} \leq C_{1k} \text{ und } a \vee a_1 \leq \tilde{X} \\
& \Leftrightarrow \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \vee a \vee a_1 \leq \tilde{X} \leq C_{1k} \\
& \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, 1^{n-2} - 1\} : a \leq C_{1j} \\
& \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, 1^{n-2} - 1\} : C_{1k} \in \text{Filter}(a) \\
& \Rightarrow \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

\mathcal{X}_0 und $[a_1, C_1]$ sind disjunkt, denn:

$$\begin{aligned}
& \tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \cap [a_1, C_1] \\
& \Leftrightarrow \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \vee a_1 \leq \tilde{X} \leq C_{1k} \text{ und } a_1 \leq \tilde{X} \leq C_1 \\
& \Leftrightarrow \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \vee a_1 \leq \tilde{X} \leq C_{1k} \wedge C_1 \\
& \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, 1^{n-2} - 1\} : a_{2j} \leq C_1 \\
& \Rightarrow \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

$\text{Filter}(a \vee a_1)$ und $[a_1, C_1]$ sind disjunkt, denn:

$$\begin{aligned}
& \tilde{X} \in \text{Filter}(a \vee a_1) \cap [a_1, C_1] \\
& \Leftrightarrow a \vee a_1 \leq \tilde{X} \text{ und } a_1 \leq \tilde{X} \leq C_1 \\
& \Leftrightarrow a \vee a_1 \leq \tilde{X} \leq C_1 \\
& \Rightarrow a \leq C_1 \\
& \Rightarrow C_1 \in \text{Filter}(a) \\
& \Rightarrow \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit von

$$\mathcal{X}_0 \dot{\cup} \text{Filter}(a \vee a_1) \dot{\cup} [a_1, C_1] \subseteq \text{Filter}(a_1)$$

ist klar, denn

$$\begin{aligned}
& \tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \tilde{X} \geq a_{2j} \vee a_1 \geq a_1 \\
& \tilde{X} \in \text{Filter}(a \vee a_1) \Rightarrow \tilde{X} \geq a \vee a_1 \geq a_1 \\
& \tilde{X} \in [a_1, C_1] \Rightarrow \tilde{X} \geq a_1
\end{aligned}$$

Sei $\tilde{X} \in \text{Filter}(a_1)$, d. h. $\tilde{X} \geq a_1$. Wegen

$$\mathcal{L}(n) = \text{Filter}(a) \dot{\cup} \text{Ideal}(C) \dot{\cup} [a_1, C_1] \dot{\cup} \Delta$$

haben wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $\tilde{X} \in \text{Filter}(a) \Rightarrow \tilde{X} \in \text{Filter}(a \vee a_1)$
2. Fall: $\tilde{X} \in \text{Ideal}(C) \Rightarrow a_1 \leq \tilde{X} \leq C \Rightarrow a_1 \in \text{Ideal}(C) \Rightarrow \text{Widerspruch}$
3. Fall: $\tilde{X} \in [a_1, C_1]$
4. Fall: $\tilde{X} \in \Delta \Rightarrow \tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \quad (*)$

Beweis zu ():* Es gibt insgesamt $\binom{n-1}{n-2}_2 = 2^{n-1} - 1$ Coatome \tilde{C} , so dass $a_1 \leq \tilde{C}$. Nach Tabelle 2 sind dies genau alle $C_{1,1}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}, C_1$ sowie $\binom{n-2}{n-3}_2 = 2^{n-2} - 1$ Coatome aus $\text{Filter}(a)$.

Für ein Coatom C' mit $C' \geq \tilde{X}$ gilt notwendig $a_1 \leq C'$. Angenommen, alle Coatome $C' \geq \tilde{X}$ liegen in $\text{Filter}(a)$. Wir bezeichnen diese Coatome mit C'_1, \dots, C'_s .

Allgemein ist jedes Element einer partiell geordneten Menge der Schnitt aller Coatome, die es umfassen.

Es gilt also:

$$\tilde{X} = C'_1 \wedge \dots \wedge C'_s$$

Da alle C'_i in $\text{Filter}(a)$ liegen, liegt dort auch deren Schnitt, d.h. $\tilde{X} \in \text{Filter}(a)$, was ein Widerspruch zu $\tilde{X} \in \Delta$ ist.

Ferner gilt wegen $\tilde{X} \notin [a_1, C_1]$ und $\tilde{X} \geq a_1$: $\tilde{X} \not\leq C_1$. Somit muss es ein Coatom $C_{1k} \in \{C_{1,1}, \dots, C_{1,2^{n-2}-1}\}$ geben mit $\tilde{X} \leq C_{1k}$.

Es bleibt zu zeigen, dass es ein $j \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ gibt mit $a_{2j} \leq \tilde{X}$.

Angenommen, es gilt:

$$\forall j \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \not\leq \tilde{X}$$

Der Rang von \tilde{X} sei k . Wegen $\tilde{X} \not\leq C_1$ und $\tilde{X} \geq a_1$ muss $\tilde{X} > a_1$ sein, also $k \geq 2$. Es gibt insgesamt $\binom{k}{1}_2 = 2^k - 1$ Atome a' mit $a' \leq \tilde{X}$. Wegen

$$r(\tilde{X} \wedge C) = r(\tilde{X}) + r(C) - r(\tilde{X} \vee C) = k + (n-1) - n = k-1$$

liegen genau $\binom{k-1}{1}_2 = 2^{k-1} - 1$ solcher Atome in $\text{Ideal}(C)$. Ein weiteres Atom liegt in $[a_1, C_1]$, nämlich a_1 .

Nach Annahme müssen die übrigen

$$2^k - 1 - (2^{k-1} - 1) - 1 = 2^{k-1} - 1$$

Atome $a' \leq \tilde{X}$ in der Menge $\{a_{11}, \dots, a_{1,2^{n-2}-1}\}$ liegen. Aus $k \geq 2$ folgt $2^{k-1} - 1 \geq 1$, d.h. es gibt mindestens ein $l \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$, so dass

$$a_{1l} \leq \tilde{X}.$$

Es gilt $\tilde{X} \not\leq X$, denn:

$$\begin{aligned} \tilde{X} \leq X &\Rightarrow a_1 \leq \tilde{X} \leq X \Rightarrow a_1 \leq X \wedge C_1 = X \wedge C \\ &\Rightarrow a_1 \in \text{Ideal}(C) \Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Der Rang von $\tilde{X} \wedge X$ ist somit $k - 1$ und es gibt $2^{k-1} - 1$ Atome a' mit $a' \leq X \wedge \tilde{X}$. Nach Tabelle 1 sind die Atome $\leq X$ genau alle $a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}$ sowie a und $2^{n-2} - 1$ Atome $a'_1, \dots, a'_{2^{n-2}-1}$ aus $\text{Ideal}(C)$. Letztere sind wegen $X \wedge C = X \wedge C_1$ insbesondere $\leq C_1$.

Nach Annahme müssen also alle $2^{k-1} - 1$ Atome a' mit $a' \leq X \wedge \tilde{X}$ Elemente der Menge $\{a'_1, \dots, a'_{2^{n-2}-1}\}$ sein. Wir nehmen \mathfrak{C} an, dass

$$a'_1 \vee \dots \vee a'_{2^{k-1}-1} \leq X \wedge \tilde{X}$$

Ferner ist der Rang von $C_1 \wedge \tilde{X}$ ebenfalls $k - 1$, weshalb es genau $2^{k-1} - 1$ Atome a'' mit $a'' \leq C_1 \wedge \tilde{X}$ gibt. Diese sind $a'_1, \dots, a'_{2^{k-1}-2}$ und $a'_{2^{k-1}-1}$. Da es aber mindestens ein $l \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ gibt, so dass $a_{1l} \leq \tilde{X}$, und insbesondere $a_{1l} \leq C_1$ gilt, finden wir mindestens 2^{k-1} Atome $\leq C_1 \wedge \tilde{X}$, was ein Widerspruch ist.

Wir haben also

$$\mathcal{X}_0 \dot{\cup} \text{Filter}(a \vee a_1) \dot{\cup} [a_1, C_1] = \text{Filter}(a_1) \cong \mathcal{L}(n - 1)$$

gezeigt. Damit gilt:

$$\mathcal{L}_1(n - 2) \cong \mathcal{L}(n - 1) \setminus \text{Filter}(a \vee a_1) \dot{\cup} [a_1, C_1] = \mathcal{X}_0$$

□

Analog finden wir:

$$\mathcal{X}_1 := \{\tilde{X} | \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{1j} \vee x \leq \tilde{X} \leq C_{2k}\} \cong \mathcal{L}_1^{1,+}(n - 1)$$

$$\mathcal{Y}_0 := \{\tilde{X} | \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2j} \leq \tilde{X} \leq C_{1k} \wedge X\} \cong \mathcal{L}_1^{0,-}(n - 1)$$

$$\mathcal{Y}_1 := \{\tilde{X} | \exists j, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{1j} \leq \tilde{X} \leq C_{2k} \wedge C_1\} \cong \mathcal{L}_1^{1,-}(n - 1)$$

Die vier Mengen $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_0$ und \mathcal{Y}_1 sind disjunkt, denn

$$\begin{aligned}
\tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1 &\Rightarrow \exists j_1, k_1, j_2, k_2 \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \\
&\quad a_{2j_1} \vee a_1 \vee a_{1j_2} \vee x \leq \tilde{X} \leq C_{1k_1} \wedge C_{2k_2} \\
&\Rightarrow a \leq a_1 \vee x \leq C_{1k_1} \wedge C_{2k_2} \Rightarrow \text{Widerspruch} \\
\tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{Y}_0 &\Rightarrow \exists j_1, k_1, j_2, k_2 \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \\
&\quad a_{2j_1} \vee a_1 \vee a_{2j_2} \leq \tilde{X} \leq C_{1k_1} \wedge C_{2k_2} \wedge X \\
&\Rightarrow a_1 \leq X \Rightarrow \text{Widerspruch} \\
\tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{Y}_1 &\Rightarrow \exists j_1, k_1, j_2, k_2 \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \\
&\quad a_{2j_1} \vee a_1 \vee a_{1j_2} \leq \tilde{X} \leq C_{1k_1} \wedge C_{2k_2} \wedge C_1 \\
&\Rightarrow \tilde{X} \in [a_1, C_1] \\
&\Rightarrow \text{Widerspruch zur Disjunktheit von } \mathcal{X}_0 \text{ und } [a_1, C_1] \\
\tilde{X} \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{Y}_0 &\Rightarrow \exists j_1, k_1, j_2, k_2 \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \\
&\quad a_{2j_1} \vee x \vee a_{2j_2} \leq \tilde{X} \leq C_{2k_1} \wedge C_{1k_2} \wedge X \\
&\Rightarrow x \leq X \Rightarrow \text{Widerspruch} \\
\tilde{X} \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{Y}_1 &\Rightarrow \exists j_1, k_1, j_2, k_2 \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \\
&\quad a_{1j_1} \vee x \vee a_{1j_2} \leq \tilde{X} \leq C_{2k_1} \wedge C_{2k_2} \wedge C_1 \\
&\Rightarrow x \leq C_1 \Rightarrow \text{Widerspruch} \\
\tilde{X} \in \mathcal{Y}_0 \cap \mathcal{Y}_1 &\Rightarrow \exists j_1, k_1, j_2, k_2 \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \\
&\quad a_{2j_1} \vee a_{1j_2} \leq \tilde{X} \leq C_{1k_1} \wedge X \wedge C_{2k_2} \wedge C_1 \\
&\Rightarrow a_{2j_1} \vee a_{1j_2} \leq X \wedge C_1 \leq C \Rightarrow \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation folgt, dass $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_0$ und \mathcal{Y}_1 disjunkt zu $\text{Filter}(a)$, $\text{Ideal}(C)$ und $[a_1, C_1]$ sind.

Bemerkung: Auch das Matching f aus dem Algorithmus von Vogt und Voigt können wir übertragen:

$$\begin{aligned}
f : \mathcal{Y}_1 &\rightarrow \mathcal{X}_1 \\
S &\mapsto S \vee x
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f : \mathcal{Y}_0 &\rightarrow \mathcal{X}_0 \\
S &\mapsto S \vee a_1
\end{aligned}$$

Graphisch sieht das folgendermaßen aus:

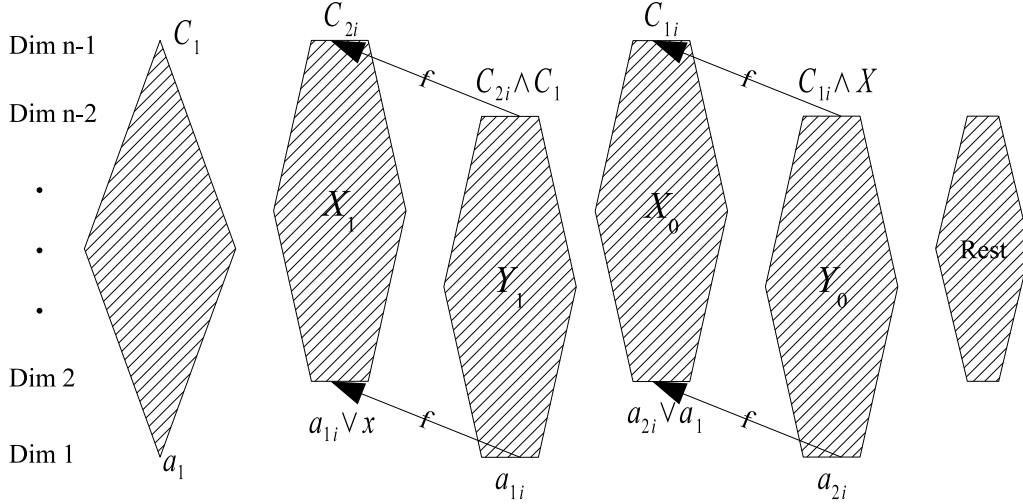


Abbildung 15: Übersetzung der ersten beiden Iterationsschritte

Dieses Bild zeigt die gleiche Struktur wie Abbildung 12.

Bis hierher haben wir also die ersten beiden Schritte des Algorithmus vollständig übersetzt.

5.3.1 Ein hinreichendes Kriterium

Da wir schon gezeigt haben, dass $\mathcal{L}(n', K)$ für $n' \leq 3$ eine Intervallzerlegung hat:

$$\mathcal{L}(n', K) = \text{Filter}(\tilde{a}) \dot{\cup} \text{Ideal}(\tilde{C}) \dot{\cup} \underbrace{\bigcup_{i=1}^{q^{n'-1}-1} [\tilde{a}_i, \tilde{C}_i]}_{\cong \mathcal{L}_1(n'-1, K)}$$

wissen wir insbesondere, dass die Menge $\mathcal{L}_1(n'-1, K)$ in $q^{n'-1} - 1$ disjunkte Intervalle vom Rang $n' - 2$ zerlegt werden kann.

Per Induktion können wir also annehmen, dass für $n \geq 4$ die Mengen

$$\mathcal{X}_0 \cong \mathcal{X}_1 \cong \mathcal{Y}_0 \cong \mathcal{Y}_1 \cong \mathcal{L}_1(n-2)$$

jeweils in $2^{n-2} - 1$ disjunkte Intervalle vom Rang $n - 3$ zerlegt werden können.

Solche Zerlegungen von \mathcal{X}_0 und \mathcal{X}_1 könnten beispielsweise sein:

$$\mathcal{X}_0 = [a_{21} \vee a_1, C_{11}] \dot{\cup} [a_{22} \vee a_1, C_{12}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{2,2^{n-2}-1} \vee a_1, C_{1,2^{n-2}-1}]$$

$$\mathcal{X}_1 = [a_{11} \vee x, C_{21}] \dot{\cup} [a_{12} \vee x, C_{22}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{1,2^{n-2}-1} \vee x, C_{2,2^{n-2}-1}]$$

Unser Ziel ist es, disjunkte Intervalle vom Rang $n - 2$ zu finden. Wir überlegen uns, wie wir aus der Kenntnis von disjunkten Intervallen der Form $[a_{2j} \vee a_1, C_{1k}]$ oder $[a_{1j} \vee x, C_{2k}]$ disjunkte Intervalle vom Rang $n - 2$ konstruieren können, die außerdem disjunkt zu $\text{Filter}(a)$, $\text{Ideal}(C)$ und $[a_1, C_1]$ sind. Wir suchen also disjunkte Intervalle vom Rang $n - 2$, die in

$$\Delta = \mathcal{L}(n) \setminus (\text{Filter}(a) \cup \text{Ideal}(C) \cup [a_1, C_1])$$

liegen.

Zunächst stellen wir fest, dass Intervalle der Form $[a_{2i}, C_{1j}]$ letztere Eigenschaft besitzen, denn:

Sei $\tilde{X} \in [a_{2i}, C_{1j}]$

1. Fall: $\tilde{X} \leq X \Rightarrow \tilde{X} \in \mathcal{Y}_0 \Rightarrow \tilde{X} \in \Delta$
2. Fall: $\tilde{X} \geq a_1 \Rightarrow \tilde{X} \in \mathcal{X}_0 \Rightarrow \tilde{X} \in \Delta$
3. Fall: $\tilde{X} \not\leq X$ und $\tilde{X} \not\geq a_1$
 Wegen $\tilde{X} \not\geq a_1$ gilt $\tilde{X} \notin [a_1, C_1]$
 Wegen $\tilde{X} \leq C_{1j}$ gilt $\tilde{X} \not\leq a$
 Wegen $\tilde{X} \geq a_{2j}$ gilt $\tilde{X} \not\leq C$
 $\Rightarrow \tilde{X} \in \Delta$

Auch Intervalle der Form $[a_{1i}, C_{2j}]$ liegen in Δ .

Die Disjunktheit der Intervalle erzielen wir mit folgendem

Lemma 5.8 *Sind zwei Intervalle $[a_{2i} \vee a_1, C_{1j}]$ und $[a_{2k} \vee a_1, C_{1l}]$ disjunkt, so auch die Intervalle $[a_{2i}, C_{1j}]$ und $[a_{2k}, C_{1l}]$*

Beweis: Sei $\tilde{X} \in [a_{2i}, C_{1j}]$

1. Fall: $a_{2k} \not\leq C_{1j}$
 $\tilde{X} \in [a_{2i}, C_{1j}] \Rightarrow \tilde{X} \leq C_{1j} \Rightarrow \tilde{X} \not\leq a_{2k} \Rightarrow \tilde{X} \notin [a_{2k}, C_{1l}]$
 $\tilde{X} \in [a_{2k}, C_{1l}] \Rightarrow \tilde{X} \geq a_{2k} \Rightarrow \tilde{X} \not\leq C_{1j} \Rightarrow \tilde{X} \notin [a_{2i}, C_{1j}]$
2. Fall: $a_{2i} \not\leq C_{1l}$
 $\tilde{X} \in [a_{2i}, C_{1j}] \Rightarrow \tilde{X} \geq a_{2i} \Rightarrow \tilde{X} \not\leq C_{1l} \Rightarrow \tilde{X} \notin [a_{2k}, C_{1l}]$
 $\tilde{X} \in [a_{2k}, C_{1l}] \Rightarrow \tilde{X} \leq C_{1l} \Rightarrow \tilde{X} \not\leq a_{2i} \Rightarrow \tilde{X} \notin [a_{2i}, C_{1j}]$
3. Fall: $a_{2k} \leq C_{1j}$ und $a_{2i} \leq C_{1l}$
 $\Rightarrow a_{2k} \vee a_{2i} \vee a_1 \in [a_{2i} \vee a_1, C_{1j}] \cap [a_{2k} \vee a_1, C_{1l}]$
 \Rightarrow Widerspruch zur Disjunktheit von
 $[a_{2i} \vee a_1, C_{1j}]$ und $[a_{2k} \vee a_1, C_{1l}]$

□

Genauso gilt das

Lemma 5.9 *Sind zwei Intervalle $[a_{1i} \vee x, C_{2j}]$ und $[a_{1k} \vee x, C_{2l}]$ disjunkt, so auch die Intervalle $[a_{1i}, C_{2j}]$ und $[a_{1k}, C_{2l}]$.*

Wir können also disjunkte Intervalle vom Rang $n - 3$ aus \mathcal{X}_0 bzw. \mathcal{X}_1 mit Hilfe der Matchingkante „herunterziehen“ auf disjunkte Intervalle vom Rang $n - 2$.

Jedoch ist beim „Herunterziehen“ die Erhaltung der Disjunktheit insgesamt nicht garantiert, d. h. Intervalle $[a_{2i}, C_{1j}]$ schneiden möglicherweise Intervalle $[a_{1k}, C_{2l}]$, wie Abbildung 16 illustriert:

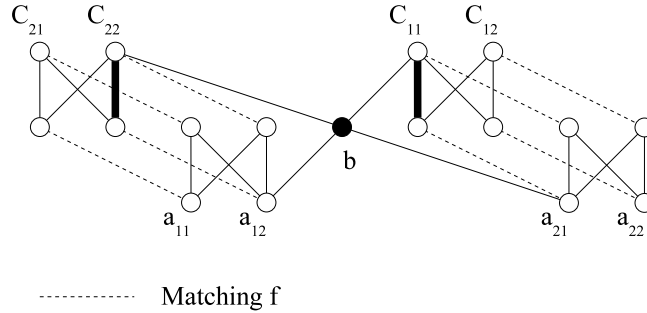


Abbildung 16: Schnitt von heruntergezogenen Intervallen

Ziehen wir die fett markierten Intervalle $[a_{12} \vee x, C_{22}]$ und $[a_{21} \vee a_1, C_{11}]$ mit der Matchingkante herunter zu $[a_{12}, C_{22}]$ und $[a_{21}, C_{11}]$, so schneiden sich diese Intervalle in dem Element b .

Die Frage ist nun, ob es eine Kombination von Zerlegungen von \mathcal{X}_0 und \mathcal{X}_1 gibt, so dass alle Intervalle nach dem Herunterziehen disjunkt bleiben. Dafür verschaffen wir uns zunächst einen Überblick über die Struktur der Elemente in \mathcal{X}_0 und \mathcal{X}_1 und ordnen diese auf bestimmte Weise an.

Lemma 5.10

$$\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} \exists ! i_k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_{2, i_k}$$

und

$$k \neq l \Rightarrow i_k \neq i_l$$

Beweis: Da das Element $a_{1k} \vee x$ Rang 2 hat, gibt es neben a_{1k} und x genau ein weiteres Atom y , so dass $y \leq a_{1k} \vee x$ bzw. $a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee y$. Angenommen, $y = a$, d. h.

$$a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a$$

Nach Tabelle 2 gibt es 2^{n-3} Coatome C_{2s} , so dass $C_{2s} \geq a_{1k}$. Insbesondere gilt

$$C_{2s} \geq a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a$$

was ein Widerspruch zu $C_{2s} \notin \text{Filter}(a)$ ist.
 Angenommen, $y = a_1$, d. h.

$$a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_1$$

Dies führt auch zum Widerspruch, denn $a_1 \not\leq C_{2s}$.
 Angenommen, $\exists l \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : y = a_{1l}$, d. h.

$$a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_{1l}$$

Wegen $C_1 \geq a_{1k} \vee a_{1l}$ muss also auch $C_1 \geq x$ gelten, was ein Widerspruch ist.

Angenommen, $y \in \text{Ideal}(C)$. Dann gilt

$$a_{1k} \vee x = x \vee y \leq C$$

und somit $a_{1k} \leq C$, was nicht der Fall ist.

Folglich ist y in der Menge $\{a_{21}, \dots, a_{2,2^{n-2}-1}\}$ zu finden.

Die zweite Behauptung ist klar, denn:

Angenommen $\exists k \neq l : a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_{2,i_k}$ und $a_{1l} \vee x = a_{1l} \vee a_{2,i_k}$. Dann gilt auch

$$a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_{2,i_k} = x \vee a_{2,i_k} = a_{1l} \vee x = a_{1k} \vee a_{1l}$$

Dies kann aber nicht sein, denn oben wurde gezeigt, dass es kein $l \neq k$ gibt mit $a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_{1l}$. \square

Dual dazu finden wir das

Lemma 5.11

$$\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} \exists! j_k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : C_{1k} \wedge X = C_{1k} \wedge C_{2,j_k}$$

und

$$k \neq l \Rightarrow j_k \neq j_l$$

Damit können wir \mathbb{E} die Atome a_{1i} und die Coatome C_{1i} so anordnen, dass gilt:

$$\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{1k} \vee x = a_{1k} \vee a_{2k} \text{ und } C_{1k} \wedge x = C_{1k} \wedge C_{2k}$$

Nach Tabelle 2 gibt es für jedes $k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ genau 2^{n-3} Coatome $C_{1k_1}, \dots, C_{1k_{2^{n-3}}}$, so dass

$$a_{2k} \leq C_{1k_1} \wedge \dots \wedge C_{1k_{2^{n-3}}}$$

Jedem k wird also eine eindeutige (2^{n-3}) -Menge $\{k_1, \dots, k_{2^{n-3}}\}$ von Elementen $k_i \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ zugeordnet. Dies ergibt eine Familie

$$\mathcal{Z} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{2^{n-2}-1}\}$$

von (2^{n-3}) -Mengen aus $\{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$.

Mit der obigen Anordnung der Atome a_{1i} und die Coatome C_{1i} gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} a_{2k} &\leq C_{1k_1} \wedge \dots \wedge C_{1k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{2k} &\leq C_{1k_1} \wedge \dots \wedge C_{1k_{2^{n-3}}} \wedge X \\ \Leftrightarrow a_{2k} &\leq C_{1k_1} \wedge X \wedge \dots \wedge C_{1k_{2^{n-3}}} \wedge X \\ \Leftrightarrow a_{2k} &\leq C_{2k_1} \wedge X \wedge \dots \wedge C_{2k_{2^{n-3}}} \wedge X \\ \Leftrightarrow a_{2k} &\leq C_{2k_1} \wedge \dots \wedge C_{2k_{2^{n-3}}} \wedge X \\ \Leftrightarrow a_{2k} &\leq C_{2k_1} \wedge \dots \wedge C_{2k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{2k} \vee x &\leq C_{2k_1} \wedge \dots \wedge C_{2k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{1k} \vee x &\leq C_{2k_1} \wedge \dots \wedge C_{2k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{1k} &\leq C_{2k_1} \wedge \dots \wedge C_{2k_{2^{n-3}}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} a_{2k} &\leq C_{1k_1} \wedge \dots \wedge C_{1k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{2k} &\leq C_{1k_1} \text{ und } \dots \text{ und } a_{2k} \leq C_{1k_{2^{n-3}}} \\ \forall j: x \not\leq C_{1j} &\Leftrightarrow a_{2k} \vee x \not\leq C_{1k_1} \text{ und } \dots \text{ und } a_{2k} \vee x \not\leq C_{1k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{2k} \vee a_{1k} &\not\leq C_{1k_1} \text{ und } \dots \text{ und } a_{2k} \vee a_{1k} \not\leq C_{1k_{2^{n-3}}} \\ \Leftrightarrow a_{1k} &\not\leq C_{1k_1} \text{ und } \dots \text{ und } a_{1k} \not\leq C_{1k_{2^{n-3}}} \end{aligned}$$

Somit können wir alle Beziehungen der Atome a_{1i} und a_{2j} zu den Coatomen C_{1k} und C_{2l} mit Hilfe der Mengen $\zeta_1, \dots, \zeta_{2^{n-2}-2}$ und $\zeta_{2^{n-2}-1}$ ausdrücken:

$$\forall k \in \zeta_i : a_{2i} \leq C_{1k} \text{ und } \forall k \notin \zeta_i : a_{2i} \not\leq C_{1k}$$

$$\forall k \in \zeta_i : a_{2i} \leq C_{2k} \text{ und } \forall k \notin \zeta_i : a_{2i} \not\leq C_{2k}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \zeta_i : a_{1i} \leq C_{2k} \text{ und } \forall k \notin \zeta_i : a_{1i} \not\leq C_{2k} \\ \forall k \in \zeta_i : a_{1i} \not\leq C_{1k} \text{ und } \forall k \notin \zeta_i : a_{1i} \leq C_{1k} \end{aligned}$$

Nehmen wir eine beliebige Zerlegung von $\mathcal{X}_0, \mathbb{E}$

$$\mathcal{X}_0 = [a_{21} \vee a_1, C_{11}] \dot{\cup} [a_{22} \vee a_1, C_{12}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{2,2^{n-2}-1} \vee a_1, C_{1,2^{n-2}-1}]$$

Bemerkung: Dann ist

$$\mathcal{X}_1 = [a_{11} \vee x, C_{21}] \dot{\cup} [a_{12} \vee x, C_{22}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{1,2^{n-2}-1} \vee x, C_{2,2^{n-2}-1}]$$

eine Zerlegung von \mathcal{X}_1 in disjunkte Intervalle.

Der folgende Satz stellt ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer „passenden“ Zerlegung von \mathcal{X}_1 dar, so dass alle Intervalle nach dem Herunterziehen disjunkt bleiben.

Satz 5.4 *Existiert eine bijektive Abbildung*

$$\varphi : \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} \rightarrow \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$$

so dass für jedes Element $i \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ gilt:

$$\forall k \in (\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\}) : \zeta_k \ni i \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_k) \not\ni i$$

so ist

$$\mathcal{X}_1 = [a_{11} \vee x, C_{2,\varphi(1)}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{1,2^{n-2}-1} \vee x, C_{2,\varphi(2^{n-2}-1)}]$$

eine disjunkte Intervallzerlegung von \mathcal{X}_1 , so dass alle Intervalle nach dem Herunterziehen disjunkt bleiben:

$$\begin{aligned} \Delta &= [a_{21}, C_{11}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{2,2^{n-2}-1}, C_{1,2^{n-2}-1}] \\ &\dot{\cup} [a_{11}, C_{2,\varphi(1)}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{1,2^{n-2}-1}, C_{2,\varphi(2^{n-2}-1)}] \end{aligned}$$

Beweis: Wir benutzen folgendes hinreichende Kriterium für die Disjunktheit zweier Intervalle: Seien $A, B, A', B' \in \mathcal{L}(n, K)$ beliebig. Dann gilt:

$$A \not\leq B' \text{ oder } A' \not\leq B \Rightarrow [A, B] \text{ und } [A', B'] \text{ disjunkt}$$

Angenommen, dies wäre nicht so, d. h.

$$\begin{aligned}
\exists \tilde{X} \in [A, B] \cap [A', B'] &\Leftrightarrow A \vee A' \leq \tilde{X} \leq B \wedge B' \\
&\Rightarrow A \leq A \vee A' \leq B \wedge B' \leq B' \\
\text{und } A' &\leq A \vee A' \leq B \wedge B' \leq B \\
&\Rightarrow \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

Hinreichend für die Disjunktheit des Intervalls $[a_{2i}, C_{1i}]$ zu allen $[a_{1j}, C_{2,\varphi(j)}]$ ist also die Bedingung:

$$\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : a_{2i} \not\leq C_{2,\varphi(k)} \text{ oder } a_{1k} \not\leq C_{1i}$$

Diese ist äquivalent zu

$$\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : \varphi(k) \notin \zeta_i \text{ oder } i \in \zeta_k$$

Wegen unserer Wahl der Zerlegung von \mathcal{X}_0 gilt für alle $j \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : j \in \zeta_j$, also bleibt die Bedingung

$$\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}, k \neq i : \varphi(k) \notin \zeta_i \text{ oder } i \in \zeta_k$$

zu erfüllen. Diese folgt aus

$$\forall k \in (\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\}) : \zeta_k \ni i$$

Hinreichend für die Disjunktheit des Intervalls $[a_{1i} \vee x, C_{2,\varphi(i)}]$ zu allen $[a_{1k} \vee x, C_{2,\varphi(k)}], k \neq i$, ist wegen $x \leq C_{2,j}$ für alle j die Bedingung:

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}, k \neq i : a_{1i} \vee x \not\leq C_{2,\varphi(k)} \text{ oder } a_{1k} \vee x \not\leq C_{2,\varphi(i)} \\
&\stackrel{\forall j: x \leq C_{2j}}{\Leftrightarrow} \forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}, k \neq i : a_{1i} \not\leq C_{2,\varphi(k)} \text{ oder } a_{1k} \not\leq C_{2,\varphi(i)} \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} \setminus \{i\} : \varphi(k) \notin \zeta_i \text{ oder } \varphi(i) \notin \zeta_k \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} \setminus \{i\} : k \notin \varphi^{-1}(\zeta_i) \text{ oder } i \notin \varphi^{-1}(\zeta_k)
\end{aligned}$$

Diese folgt aus:

$$\forall k \in (\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\}) : \varphi^{-1}(\zeta_k) \not\ni i$$

Da nach Lemmata 5.8 und 5.9 auch die Intervalle $[a_{2i}, C_{1i}]$ sowie $[a_{1i}, C_{2,\varphi(i)}]$ disjunkt sind, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung: Es gilt:

$$i \in \zeta_k \Rightarrow k \notin (\zeta_i \setminus \{i\})$$

denn, angenommen $\exists i, k \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} : i \in \zeta_k$ und $k \in \zeta_i \setminus \{i\}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a_{2k} \leq C_{1i} \text{ und } k \neq i \text{ und } a_{2i} \neq C_{1k} \\ &\Rightarrow a_{2i} \leq a_{2i} \vee a_{2k} \leq C_{1i} \text{ und } a_{2k} \leq a_{2i} \vee a_{2k} \leq C_{1k} \\ &\Rightarrow a_{2i} \vee a_{2k} \in [a_{2i}, C_{1i}] \cap [a_{2k}, C_{1k}] \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch zur Disjunktheit der Intervalle } [a_{2j}, C_{1j}] \end{aligned}$$

Eine Abbildung φ wie im Satz gefordert hat also notwendig die Eigenschaft

$$\forall k \in \varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\} : k \notin \zeta_i$$

Benutzen wir die Notation ϑ_i für das Komplement von ζ_i :

$$\vartheta_i := \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\} \setminus \zeta_i$$

so haben wir als notwendige Eigenschaft von φ

$$\forall k \in \varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\} : k \in \vartheta_i$$

bzw.

$$\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\} \subseteq \vartheta_i$$

Im Fall $i \notin \varphi^{-1}(\zeta_i)$ gilt

$$\begin{aligned} |\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\}| &= |\varphi^{-1}(\zeta_i)| = |\zeta_i| = 2^{n-3} \\ &> |\vartheta_i| = 2^{n-2} - 1 - |\zeta_i| = 2^{n-3} - 1 \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Also muss $i \in \varphi^{-1}(\zeta_i)$ gelten und damit

$$|\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\}| = 2^{n-3} - 1 = |\vartheta_i|$$

d. h.

$$\varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\} = \vartheta_i$$

Die Abbildung φ kann also nicht die Identität sein und damit ist die Zerlegung

$$\mathcal{X}_1 = [a_{11} \vee x, C_{21}] \dot{\cup} [a_{12} \vee x, C_{22}] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [a_{1,2^{n-2}-1} \vee x, C_{2,2^{n-2}-1}]$$

keine „passende“ Zerlegung von \mathcal{X}_1 .

Insbesondere für $n = 4$ muss φ fixpunktfrei sein, denn

$$\begin{aligned} & \text{Angenommen, } \exists j \in \{1, 2, 3\} : \varphi(j) = j \\ & \Rightarrow \varphi(\zeta_i) = \zeta_i \text{ für } \zeta_i := \{1, 2, 3\} \setminus \{j\} \\ & \Rightarrow \varphi^{-1}(\zeta_i) \setminus \{i\} = \zeta_i \setminus \{i\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

Für $n = 4$ finden wir eine solche Abbildung φ .

Die einzige Möglichkeit einer Familie $\mathcal{Z} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$ von 2-Mengen aus $\{1, 2, 3\}$ ist

$$\mathcal{Z} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Wegen $i \in \zeta_i$ bleiben zwei Fälle:

1. Fall: $\zeta_1 = \{1, 2\}, \zeta_2 = \{2, 3\}, \zeta_3 = \{1, 3\}$

Mit $\varphi := (123)$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\zeta_1) &= \{1, 3\} \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_1) \setminus \{1\} = \{3\} \\ \varphi^{-1}(\zeta_2) &= \{1, 2\} \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_2) \setminus \{2\} = \{1\} \\ \varphi^{-1}(\zeta_3) &= \{2, 3\} \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_3) \setminus \{3\} = \{2\} \end{aligned}$$

und damit sind die Bedingungen des Satzes

$$\begin{aligned} \zeta_3 \ni 1 \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_3) \not\ni 1 \\ \zeta_1 \ni 2 \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_1) \not\ni 2 \\ \zeta_2 \ni 3 \text{ und } \varphi^{-1}(\zeta_2) \not\ni 3 \end{aligned}$$

erfüllt.

2. Fall: $\zeta_1 = \{1, 3\}, \zeta_2 = \{1, 2\}, \zeta_3 = \{2, 3\}$

In diesem Fall erfüllt $\varphi := (132)$ die Bedingungen des Satzes.

Wir werden sehen, dass es für Dimensionen $n \geq 5$ eine Abbildung φ wie im Satz gefordert nicht geben kann.

5.3.2 Der Intervall-Schnitt-Satz

Es gilt sogar der viel stärkere

Satz 5.5 (Intervall-Schnitt-Satz) *Sei*

$$\mathcal{X}_0 = [a_{21} \vee a_1, C_{11}] \dot{\cup} [a_{22} \vee a_1, C_{12}] \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} [a_{2,2^{n-2}-1} \vee a_1, C_{1,2^{n-2}-1}]$$

eine beliebige Zerlegung von \mathcal{X}_0 .

Für $n \geq 5$ gibt es für $i \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ kein Intervall $[a_{1i}, C_{2k}]$, das zu allen Intervallen $[a_{2l}, C_{1l}]$ disjunkt ist.

Beweis: Sei $i \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$.

Wir benutzen drei wesentliche Gesetzmäßigkeiten:

$$k \in \zeta_i \Leftrightarrow a_{2i} \leq C_{1k} \Leftrightarrow a_{2i} \leq C_{2k} \Leftrightarrow a_{1i} \leq C_{2k} \Leftrightarrow a_{1i} \not\leq C_{1k} \quad (1)$$

$$\forall k \in \vartheta_i : a_{2k} \leq C_{2i} \quad (2)$$

$$\forall k \in \zeta_i \setminus \{i\} \exists l_k \in \vartheta_i : a_{1,l_k} \vee a_{1i} \leq C_{2i} \wedge C_{2k} \quad (3)$$

(1) folgt aus der Definition der Menge ζ_i .

Zu (2): Angenommen, $\exists k \in \vartheta_i : a_{2k} \not\leq C_{2i}$.

Nach Tabelle 1 gibt es genau 2^{n-3} Atome a_{2i_j} , so dass $C_{2i} \geq a_{2i_j}$. Wegen $a_{2i} \leq C_{1i}$ und (1) gilt: $a_{2i} \leq C_{2i}$.

Seien $i_j \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ die Zahlen, für die gilt:

$$C_{2i} \geq a_{2i} \vee a_{2i_1} \vee \dots \vee a_{2i_{2^{n-3}-1}}$$

Aus der Annahme $a_{2k} \not\leq C_{2i}$ folgt, dass

$$\forall j \in \{1, \dots, 2^{n-3} - 1\} : i_j \neq k \text{ und } i \neq k$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} & |\vartheta_i \setminus \{k\}| = 2^{n-3} - 1 - 1 < |\{i_1, \dots, i_{2^{n-3}-1}\}| = 2^{n-3} - 1 \\ \Rightarrow & \exists l \in \{i_1, \dots, i_{2^{n-3}-1}\} : l \notin \vartheta_i \setminus \{k\} \\ \Rightarrow & \exists l \in \{i_1, \dots, i_{2^{n-3}-1}\} : l \in \zeta_i \text{ oder } l = k \\ \Rightarrow & \exists l \in \{i_1, \dots, i_{2^{n-3}-1}\} : l \in \zeta_i \\ \Rightarrow & \underbrace{\exists l \in \zeta_i \setminus \{i\}}_{\Rightarrow i \in \vartheta_l} : \underbrace{C_{2i} \geq a_{2l}}_{\Leftrightarrow i \in \zeta_l} \\ \Rightarrow & \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Zu (3): Sei $k \in \zeta_i \setminus \{i\}$.

Nach Tabelle 1 gibt es genau 2^{n-4} Atome a_{1j} , so dass $a_{1j} \leq C_{2i} \wedge C_{2k}$. Wegen $n \geq 5$ gibt es also mindestens zwei solcher Atome. Eins davon ist a_{1i} , denn

$$a_{2i} \leq C_{1i} \Rightarrow a_{1i} \leq C_{2i}$$

$$k \in \zeta_i \Rightarrow a_{1i} \leq C_{2k}$$

Also gibt es mindestens ein $j \neq i$, so dass $a_{1j} \leq C_{2i} \wedge C_{2k}$. Daraus folgt:

$$a_{1j} \leq C_{2i} \Leftrightarrow i \in \zeta_j \Rightarrow (j \notin \zeta_i \text{ oder } j = i) \Rightarrow j \in \vartheta_i$$

Mit $l_k := j$ ist dies die Behauptung (3).

Nun können wir den Satz beweisen.

Als Intervalle kommen alle $[a_{1i}, C_{2k}]$ mit $k \in \zeta_i$ in Frage, denn für $k \notin \zeta_i$ ist $[a_{1i}, C_{2k}]$ ein leeres Intervall.

1. Fall: $k \in \zeta_i \setminus \{i\}$

Sei $l_k \in \vartheta_i$ gemäß (3). Dann gilt

$$a_{1l_k} \leq C_{2l_k} \text{ und (1)} \Rightarrow a_{2l_k} \leq C_{1l_k}$$

$$l_k \in \vartheta_i \text{ und (1)} \Rightarrow a_{1i} \leq C_{1l_k}$$

und damit

$$a_{2l_k} \leq a_{2l_k} \vee a_{1i} \leq C_{1l_k}$$

Ferner gilt

$$(3) \text{ und (1)} \Rightarrow a_{2l_k} \vee a_{1i} \leq C_{2i} \wedge C_{2k}$$

und damit

$$a_{1i} \leq a_{2l_k} \vee a_{1i} \leq C_{2i} \wedge C_{2k} \leq C_{2k}$$

Somit haben wir:

$$a_{2l_k} \vee a_{1i} \in [a_{1i}, C_{2k}] \cap [a_{2l_k}, C_{1l_k}]$$

Das Intervall $[a_{1i}, C_{2k}]$ hat also mit $[a_{2l_k}, C_{1l_k}]$ einen nichtleeren Schnitt.

2. Fall: $k = i$

Für alle $r \in \vartheta_i$ gilt:

$$a_{2r} \leq a_{2r} \vee a_{1i} \stackrel{(1)}{\leq} C_{1r}$$

und

$$a_{1i} \leq a_{2r} \vee a_{1i} \stackrel{(2)}{\leq} C_{2i}$$

Das Intervall $[a_{1i}, C_{2i}]$ hat also mit allen $[a_{2r}, C_{1r}]$ einen nichtleeren Schnitt.

□

Der Satz besagt nicht nur, dass wir zu einer Zerlegung von \mathcal{X}_0 keine passende Zerlegung von \mathcal{X}_1 finden können, so dass alle Intervalle nach dem Herunterziehen disjunkt bleiben, sondern sogar, dass es in \mathcal{X}_1 nicht einmal *ein* Intervall vom Rang $n - 3$ gibt, das nach dem Herunterziehen zu allen heruntergezogenen Intervallen von \mathcal{X}_0 disjunkt ist.

Somit können wir für $n \geq 5$ den Algorithmus von Vogt und Voigt nicht ausnutzen, um die Existenz einer Intervallzerlegung von $\mathcal{L}(n, K)$ nachzuweisen.

6 Ausblick

Die Frage nach der Existenz einer Intervallzerlegung von $\mathcal{L}(n, K)$ für $n \geq 5$ ist leider weiterhin offen.

Da der Algorithmus von Vogt und Voigt dieses Problem nicht lösen kann, könnten wir versuchen, über Birkhoffs Darstellung von $\mathcal{L}(n, K)$ als Produkt symmetrischer Kettenordnungen [9] eine Intervallzerlegung zu finden.

Eine weitere interessante Frage ist die nach der Existenz einer Intervallzerlegung des Verbandes der linearen Unterräume von \mathcal{R}^n . Dabei können wir ausnutzen, dass \mathcal{R}^n ein Hilbert-Raum ist und damit jeder Unterraum $U \subseteq \mathcal{R}^n$ ein (eindeutiges) orthogonales Komplement

$$U^\perp = \{v \in \mathcal{R}^n \mid \forall u \in U : \langle u, v \rangle = 0\}$$

hat.

Das orthogonale Komplement hat zudem die Eigenschaft der *Invertierbarkeit*

$$U \vee U^\perp = \mathcal{R}^n \text{ und } U \wedge U^\perp = \mathbf{0} \text{ und } (U^\perp)^\perp = U$$

Insbesondere gelten für orthogonale Komplemente die *de Morganschen Regeln*:

$$(U \vee V)^\perp = U^\perp \wedge V^\perp \text{ und } (U \wedge V)^\perp = U^\perp \vee V^\perp$$

Verbände mit solchen orthogonalen Komplementen, darunter beispielsweise auch \mathcal{C}^n , heißen allgemein *Ortho-Verbände*.

Diese Klasse von Verbänden kann als nichtdistributives Analogon zu den Booleschen Verbänden gesehen werden.

In einem nächsten Schritt können wir den Fall eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes betrachten. In diesem Fall existiert zwar ein orthogonales Komplement, jedoch kann $U \vee U^\perp \not\subseteq V$ gelten. Die Invertierbarkeit und die Gültigkeit der de Morganschen Regeln ist also nicht garantiert.

Ein schönes Ergebnis wäre, allgemein für die Klasse der Ortho-Verbände die Existenz einer Intervallzerlegung nachzuweisen oder andere Klassen von Verbänden zu finden, die diese Eigenschaft haben.

Literatur

- [1] Aigner, Martin: *Kombinatorik I, Grundlagen und Zähltheorie*. 1. Auflage, Berlin Heidelberg New York, Springer Verlag, 1975
- [2] Aigner, Martin: *Kombinatorik II, Matroide und Transversaltheorie*. 1. Auflage, Berlin Heidelberg New York, Springer Verlag, 1976
- [3] Grätzer, George: *General Lattice Theory*. 2. Auflage, Basel Boston Berlin Birkhäuser Verlag, 2003
- [4] Griggs, Jerrold R.: *Sufficient conditions for a symmetric chain order*. SIAM Journal of Applied Mathematics, Band 32, 1977, Seiten 807-809
- [5] de Bruijn, N.G., Kruyswijk, D., van Ebbenhorst Tengbergen, C. A.: *On the set of divisors of a number*. Nieuw Arch. Wiskunde, Band 23, 1951, Seiten 191-193
- [6] Greene, Curtis, Kleitmann, Daniel J.: *Strong versions of Sperner's theorem*. J. Combinatorial Journal, Band 20, 1976, Seiten 80-88
- [7] Bezrukov, Sergei L., Engel, Konrad: *Properties of Graded Posets Preserved by Some Operations*. Artikel
- [8] Sali, Attila: *Constructions of ranked posets*. Discrete Mathematics, Band 70, 1988, Seiten 77-83
- [9] Birkhoff, Garrett: *Lattice Theory*. 2. Auflage, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Colloquium Publications, Band 25
- [10] Metropolis, N., Rota, Gian-Carlo, Strehl, V., White, N.: *Partitions into chains of a class of partially ordered sets* Proceedings of the American Mathematical Society, Band 71, 1978, Seiten 193-196
- [11] Kleitmann, Daniel J.: *On an extremal property of antichains in partial orders. The LYM property and some of its implications and applications*. Combinatorics, M. Hall and J. H. vanLint, eds. Math. Centre Tracts, Nummer 55, Amsterdam, 1974, Seiten 77-90
- [12] Ford, L. R., Fulkerson, JR. and D. R. : *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962

- [13] Engel, Konrad, Gronau, Hans-Dietrich O. F.: *Sperner Theory in Partially Ordered Sets* 1. Auflage, Leipzig, Teubner Verlagsgesellschaft, 1985
- [14] Vogt, Frank, Voigt, Bernd: *Symmetric Chain Decompositions of Linear Lattices*. 1994,
- [15] Faigle, Ulrich: *Diskrete Mathematik*. Universität Köln, WS 2002/03, Vorlesungsskript